А. Саадабаев

# ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КУРСУ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\;py$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(\frac{dp}{dy}p(y)\right)}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy}{dx}p(y)+\frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=$$

$$=\frac{d^2p}{dy^2}p^2(y)+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p(y)$$

УДК 517
ББК 22.161.6
С 12

Рецензиялагандар:
Физика-математика илиминин доктору, профессор Байзаков А.
Физика-математика илиминин доктору, профессор Аблабеков Б.С.

С 12 **Саадабаев А.**
**Дифференциалдык теңдемелердин курсу**: . Б.: 2017. – 212 б.

ISBN 978-9967-32-255-4

Окуу китеби кадимки дифференциалдык теңдемелер курсунун бөлүмдөрүнөн турат. Кадимки дифференциалдык теңдемелер теориялык жана практикалык жактан маанилүү болгон бөлүмдөрүнөн сапаттык теориясы берилип, андагы жапюо жана жалгыздык теоремалары толугу менен берилди. Дифференциалдык теңдемелердин системаларынын турумдуулугу биринчи жакындаптыруу жана Ляпуновдун функциялары аркылуу далилденди. Акыркы главада жеке туундулуу дифференциалдык теңдемелердин теориясы берилди.

Окуу китеби университеттин математика, физика жана техникалык адистиктеги I-III курстун студенттерине арналат.

**С 1602070100-17**

**УДК 517**
**ББК 22.161.6**

ISBN 978-9967-32-255-4

## КИРИШҮҮ

Жаратылыштын кубулуштарын окуп үйрөнүүдө, физиканын жана техниканын, химиянын жана биологиянын, экономиканын жана башка көп тармактардын маселелерин чыгаруу талап кылынат. Көп учурда мындай тармактардын маселелерин чыгарууда тигил же бул кубулуштарды сүрөттөп көрсөткөн чоңдуктардын ортосундагы түз-дөн-түз көз карандуулукту орнотууга мүмкүн эмес. Бирок көп учурда кубулуштарды сүрөттөп көрсөткөн чоңдуктар менен алардын башка бир өзгөрмөлүү чоңдуктарга карата өзгөрүлүшүнүн ылдамдыктарынын ортосундагы байланыштарды түзүүгө болот.

Математикалык тилде айтканда, изделүүчү функциянын туундуларын кармап турган теңдемелерди көрсөтүүгө болот. Мындай теңдемелер дифференциалдык деп аталат. Эгер дифференциалдык теңдемеде изделүүчү функция бир гана өзгөрмөлүү чоңдуктан көз каранды болсо, анда ал кадимки дифференциалдык теңдеме деп аталат. Көп учурда кадимки деген сөз айтылбай калат да, жөн эле дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Дифференциалдык теңдемелер математикалык билим алууда эң орчундуу орунду ээлейт. Бул сабак университеттин экинчи курсунан башталып, андан ары бүткөнгө чейин уланат. Дифференциалдык теңдемелер боюнча ар түрдүү дэңгээлде орус тилинде жазылган адабияттар арбын. Бирок дифференциалдык теңдемелердин түйүндүү маселелерин камтыган кыргыз тилиндеги китептер жок. Бул окуу куралы кыргыз тилиндеги дифференциалдык тендемелердин негизги маселелерин камтыган республикабыздагы биринчи китеп.

Анын биринчи главасы дифференциалдык теңдемелер, алардын чыгарылышы жөнүндөгү түшүнүктү жана биринчи тартиптеги туундусуна карата чечилген дифференциалдык теңдемелердин теориясын, Коши маселесинин чыгарылышынын жашоо жана жалгыздык теоремасын удаалаш жакындаштыруу жана кысып чагылдыруу ыкмалары менен далилдөөнү камтыйт.

Экинчи глава биринчи тартиптеги туундусуна карата чечилбеген теңдемелердин теориясына арналат. Теңдемелерди чыгарууда параметр киргизүү ыкмасы толугу менен чагылдырылып, Лагранждын жана Клеронун теңдемелерин чыгаруу ыкмасы көрсөтүлгөн. Клеронун теңдемесинин өзгөчө чыгарылышы аныкталган.

Үчүнчү глава жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин курсуна арналып, бул теңдемелердин классы үчүн да негизги маселе болгон жашоо жана жалгыздык теоремасы далилденген жана жогорку тартиптеги теңдемелердин тартибин төмөндөтүү ыкмалары баяндалган.

Төртүнчү главада жогорку тартиптеги турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдемелердин чыгарылыштары жана экинчи тартиптеги теңдемелердин нөлдөрү жөнүндөгү теоремалар чагылдырылган.

Бешинчи главада сызыктуу теңдемелердин системасы каралып, Коши маселесинин жашоо жана жалгыздык теоремасы матрицалык формада далилденген.

Алтынчы глава толугу менен турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдемелер системасынын жалпы теориясына арналган.

Жетинчи глава дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын турумдуулук теориясын толугу менен чагылдырат. Главалардагы ар бир параграфтын аягында баяндалган теориялар мисалдар менен бекемделген жана өз алдынча иштөө үчүн мисалдар берилген. Бул мисалдардын тизмеги берилген теорияларды толугу менен өздөштүрүүгө мүмкүнчүлүк берет.

Сегизинчи главада жекече туундулуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелер берилди. Бул главанын акыркы параграфында сызыктуу эмес жеке туундулуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы алынды.

# I ГЛАВА

## ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Белгисиз функцияны, анын туундуларын жана аргументин карманган катнаш дифференциалдык теңдеме деп аталат. Бул катнашка кирген туундунун жогорку тартиби дифференциалдык теңдеменин тартиби деп аталат. Мисалы: $y'+y^2-1=0$, $xy'=y$, $y'^3-y=x$ биринчи тартиптеги, $y''=0$, $y''-y=0$, $yy''-y^3=1$ экинчи тартиптеги, $xy'''=y''$ үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдемелер.

$n$-тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпы түрдө төмөнкү катнаш түрүндө жазабыз:

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0 \tag{0.1}$$

Эгерде $y=\phi(x)$ функциясы (0.1) теңдемесин канааттандырса, б.а. $y$ти $\phi(x)$ менен ж.б. $y^{(n)}(x)$ ти $\phi^{(n)}(x)$ менен алмаштырганда теңдештик алынса, анда ал функция (0.1) теңдемесинин чыгарылышы деп аталат. Мисалы: $xy'=y$ теңдемесинин чыгарылышы $y=\phi(x)=cx$ мында $c$– параметр. Чынында эле $\phi'(x)=c, \phi(x), \phi'(x)$ функцияларын $y, y'$ тердин ордуна койсок $x\phi'(x)=\phi(x)$ же болбосо $xc=cx$. $y''+y=0$ теңдемесинин чыгарылышы $\phi(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ $c_1, c_2$– параметрлер.

Чынында эле $\phi'(x)=c_1\cos x-c_2\sin x$ $\phi''(x)=-c_1\sin x-c_2\cos x$

Демек, $\phi''(x)+\phi=-c_1\sin x-c_2\cos x+c_1\cos x+c_2\sin x=0$

Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын табуу дифференциалдык теңдемени интегралдоо деп аталат.

Жогорудагы мисалдардан биз биринчи тартиптеги теңдеменин чыгарылышы бир параметрге, экинчи тартиптеги теңдеменин чыгарылышы эки параметрге көз каранды экендигин көрдүк. Жалпылап айтканда, $n$-тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы $n$ параметрге көз каранды.

Биринчи тартиптеги $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ теңдемесинин эркин турактууну жана мүмкүн болгон бардык чыгарылышты кармаган $y = \phi(x, c)$ чыгарылышы жалпы чыгарылыш деп аталат. Ошондой эле $y = \phi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ функциясы, мында $c_1, c_2, ..., c_n$ каалагандай турактуулар, (0.1) теңдемесин канааттандырса жана мүмкүн болгон бардык чыгарылышты кармап турса, анда ал жалпы чыгарылыш..

Жалпы чыгарылыштагы турактуулардын айкын бир маанилеринен алынган чыгарылыштарды жекече чыгарылыш дейбиз. Мисалы $y'' + y = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы $\phi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ мында $c_1$, $c_2$ эркин турактуулар. $c_1$, $c_2$ге айкын маанилерди берели. $c_1 = 1, c_2 = 0$ болсун. Анда $\phi_1(x) = \sin x$ жекече чыгарылыш. Чындыгында эле бул функция жогорудагы теңдемени канааттандырат.

Мындан $y'' + y' = -\sin x + \sin x = 0$ теңдештик алынды. Эми $c_1 = 0, c_2 = 1$, болсун. Анда $y = \phi_1(x) = \cos x$ жекече чыгарылыш. Бул функция $y'' + y = 0$ теңдемесин канааттандыра тургандыгын өзүңөр текшерип көргүлө.

Жалпы чыгарылыштагы параметрлер чексиз көп маанилерди алышат. Демек, дифференциалдык теңдеме чексиз көп чыгарылыштарга ээ.

Көпчүлүк учурда берилген дифференциалдык теңдемелердин белгилүү бир шартка баш ийген чыгарылышын табуу талап кылынат. Айталык, биринчи тартиптеги $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ теңдемесинин $y(x_0) = y_0$ шартын орундаткан чыгарылышын табуу керек болсун. $y(x_0) = y_0$ шарты баштапкы шарт деп аталат. Каралуучу теңдеменин баштапкы шартты орундаткан чыгарылышын табуу Коши маселеси деп аталат.

Биз мындан ары туундуга карата чыгарылган биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди карайбыз. Мындай теңдемелер төмөндөгү түрдө жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

Бул теңдемени төмөндөгүдөй формада да жазууга болот.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Теңдемелердин ар түрдүү формасы аларды чыгарууда чоң көмөк берет. Ар бир илимдин тармагындагы системалардын убакытка карата өзгөрүү процесстери дифференциалдык теңдемелер менен берилет. Дифференциалдык теңдемелер бул реалдуу системалардын абалдарынын убакыт боюнча өзгөрүү процесстеринин математикалык моделдери. Жөнөкөй моделдерге токтололу.

1. Массасы $m$ болгон материалдык чекиттин кыймылы сырткы $F$ күчүнүн таасири менен болот. Бул кыймыл Ннютондун экинчи законуна баш ийет, б.а.

$$ma=F \tag{0.2}$$

Кыймыл $x$ огу боюнча болсун жана $x(t)$ кыймыл законунун функциясы. Ылдамдануу $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ экени бизге белгилүү. Ошондой эле сырткы күч убакытка $t$, материалдык чекиттин абалына $x(t)$ жана анын ылдамдыгына $x^1(t)$ көз каранды деп алалы, б.а. $F=F(t,x(t),x'(t))$. Бул учурда Ньютондун теңдемеси төмөндөгүдөй жазылат:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x(t),x'(t)) \tag{0.3}$$

(0.3) экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме. Албетте, кыймыл закону (0.3) теңдемеси менен толук аныкталбайт. Кыймыл законун толук аныкташ үчүн (0.3) теңдемеси менен бирге чекиттин баштапкы абалы $x(t_0)=x_0$ жана баштапкы ылдамдыгы $x'(t_0)=x'_0$ белгилүү болуу керек.

2. Радиоактивдүү ажыралыш $m(t)$ аркылуу $t$ убактысындагы радиоактивдүү заттын массасын белгилесек, анда радиоактивдүү ажыралыш төмөндөгүдөй физикалык законго баш иет. Ажыралыштын ылдамдыгы терс (себеби убакыт өткөн сайын массасы кемийт) жана учурдагы ажыралбаган заттын массасына пропорциялаш. Бул закон математикалык туюнтма түрүндө төмөндөгүдөй жазылат:

$$\frac{dm(t)}{dt}=-dm(t); \qquad d>0-const \tag{0.4}$$

Бул биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме. Мунун чыгарылышы $m(t)=ce^{-dt}$ формуласы менен берилет. $c$ эркин турактуу. Ажыралыш закону толук аныкталыш үчүн баштапкы убакыттагы заттын массасы белгилүү болуу керек, б.а. $m(t_0)=m_0$.

3. Эпидемиянын (грипптин) таралышы. Кандайдыр бир чөйрөдө $n+1$ киши болсун. Убакыттын каралуучу учурунда алардын ичинде тазасы $x(t)$ болсун, ал эми инфекцияны алып жүрүүчүлөрү $y(t)$ болсун дейли, б.а. $x(t)+y(t)=n+1$. Эгерде каралуучу чөйрөдөгү адамдардын бири-бири менен жолугушуу коэффициенти $d$ болсо, анда $\Delta t$ аралыгында грипп менен ооругандардын орточо саны $\Delta x(t) = -dx(t)$. Мындан төмөндөгүдөй дифференциалдык теңдеме келип чыгат:

$$\frac{dx}{dt} = -dx(t)\left[n - x(t) + 1\right] \tag{0.5}$$

Грипптин таралыш процессин табыш үчүн (0.5) теңдемесине $x(t_0) = n$ шартын киргизебиз, б.а. алгачкы убакта жок дегенде бир инфекция булагы бар болсун деп алабыз.

## Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

1. Төмөндөгү жазылган теңдемелердин тартибин көрсөткүлө.

а) $2xy'+y^2=1$ б) $y'^3-y'e^{2x}=0;$

в) $x^2y''=y'^2;$ г) $yy'''+3y'y''=0;$

д) $y^2y'''=y'^3;$ е) $y^{(IV)}+5y''+4y=\sin x$

2. Төмөндөгү функциялар тийиштүү дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары болобу же жокпу, турактуулардын айкын маанилеринде жекече чыгарылыштарды көрсөткүлө.

а) $y(x)=x^2+c, y'(x)=2x, c=const;$

б) $y(x)=ce^{-x}, y'(x)=-y(x), c=const;$

в) $y(x)=cx, xy'(x)=y(x);$

г) $y^2-2=ce^{1/x}, 2x^2yy'+y^2=2;$

д) $ctg\dfrac{y-x}{2}=x+c, y'=\cos(y-x);$

е) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}y''-y'-2y=0;$

ж) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2xy''+4y=0.$

## § 1.1. Өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемелер

Өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемелер деп төмөнкү түрдөгү теңдемени айтабыз:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y), \tag{1.1.1}$$

мында $a(x), b(x)$ берилген үзгүлтүксүз жана $a < x < b, c < y < d$ интервалдарында аныкталган функциялар. Биз $b(y)$ функциясын $c < y < d$ интервалынын бардык чекитинде нөлгө айланбайт деп алабыз, б.а. $b(y) \neq 0$.

*Теорема.* Эгерде $a(x), b(y)$ функциялары $a < x < b, c < y < d$ интервалдарында үзгүлтүксүз болушса жана $c < y < d$ интервалында $b(y) \neq 0$ болсо, анда ушул областтын каалаган $(x_0, y_0)$ чекити аркылуу (1.1.1) теңдемесинин чыгарылышы өтөт жана ал жалгыз.

*Далилдөө.* $y = \phi(x)$ функциясы (1.1.1) тещдемесин канааттандырсын, б.а. $\frac{d\phi(x)}{dx} = a(x)b(\phi(x))$ болсун.

Бул туюнтманын эки жагын $dx$ ке кобөйтүп, $b(\phi(x))$ ге бөлөбүз да төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{d\phi(x)}{b(\phi(x))} = a(x)dx$$

акыркы барабардыктын эки жагын $x_0$-дөн $x$-ке чейин интегралдайбыз:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\phi(x)}{b(\phi(x))} = \int_{x_0}^{x} a(s)ds + c_1, \qquad x_0 \in [a, b] \tag{1.1.2}$$

же

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int_{x_0}^{x} a(s)ds + c_1, \qquad y_0 = y(x_0),$$

$\frac{1}{b(y)}$ функциясынын баштапкы функциясы $F_1(y)$, $a(x)$ функциясынын баштапкы функциясы $F_2(x)$ болсун. Анда акыркы барабардыктан төмөнкүнү алабыз:

$$F_1(y) - F_1(y_0) = F_2(x) - F_2(x_0) \tag{1.1.3}$$

$F_1(y)$ функциясы монотондуу, анткени

$$F_1'(y) = \frac{1}{b(y)} \neq 0$$

Демек, (1.1.3) барабардыгын уке карата чечүүгө болот. Анда

$$y = F_1^{-1}[F_1(y_0) + F_2(x) - F_2(x_0)] \qquad (1.1.4)$$

(1.1.4) функциясы (1.1.1) теңдемесин жана баштапкы $y(x_0) = y_0$ шартты канааттандырат. Теорема далилденди.

Өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелер төмөнкүдөй түрдө да жазылат:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1.1.5)$$

Мында $N_1(y) \neq 0, M_2(x) \neq 0$, деп, (1.1.5)тин эки жагын $[N_1(y)M_2(x)]^{-1}$ функциясына көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = 0$$

эки жагын интегралдап, $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(s)}{M_2(s)}ds + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_1(\eta)}{N_2(\eta)}d\eta = c$ ээ болобуз. Бул туюнтма (1.1.5) теңдемесинин жалпы чыгарылышы болот:

*Мисалы,* $y' - 3x^2 y = 0$ теңдемесин интегралдоо талап кылынсын. Бул теңдемени дифференциал формасында жазабыз:

$dy - 3x^2 ydx = 0$. Акыркы теңдеменин эки жагын дагы уке бөлсөк, анда $\frac{dy}{y} - 3x^2dx = 0$. Бул теңдеме өзгөрмөлөрү ажыраган теңдеме. Ар бир мүчөсүн интегралдап, төмөнкүнү алабыз:

$$\int \frac{dy}{y} - 3\int x^2dx = \ln|c|, \qquad (I)$$

Бул жерде турактууну *ln c* деп алдык, себеби кийин потенцирлененге оңтойлуу болот. Акыркы барабардыктан

$$\ln|y| - x^3 = \ln|c| \qquad (II)$$

же болбосо, потенцирлененгенден кийин

$$y(x) = ce^{x^3},\ c - \text{эркин турактуу.} \qquad \text{(III).}$$

(I), (II), (III) туюнтмалар берилген дифференциалдык теңдемелердин ар түрдүү формада жазылган жалпы чыгарылышы. Дагы бир мисал келтирели. $y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}$ теңдемесин интегралдайлы. Муну дагы дифференциал формасында жазабыз. $\sqrt{x}dy = \sqrt{y}dx$ .

Өзгөрмөлөрдү ажыратып жана интегралдасак, анда

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + c$$

Мындан $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$.

Өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемеге көп физикалык маселелер алынып келинет. Ошондой мисалдын бирин карайбыз.

Мисал. Идиштен суюктуктун агып чыгышы Гидравликада бийиктиги $h$ка барабар болгон суюктуктун идиштин түбүндөгү тешиктен агып чыгуу закону төмөнкү формула аркылуу берилет:

$$v = 0,6\sqrt{2gh}\, {}^{см}\!/_{сек},$$

мында $g$ – эркин түшүү ылдамдануусу.

Бизге бийиктиги 10*см*ге барабар болгон чокусундагы бурчу 60°ка барабар болгон жана түбүндөгү тешигинин аянты 0,5 $см^2$ге барабар болгон суугa толтурулган конус түрүндөгү воронка берилсин. Суунун агып чыгуу законун тапкыла. Изделүүчү функция убакыт $t$нын каалаган маанисиндеги суунун бийиктиги $h$тан көз каранды болот, бирок чексиз кичине $dt$ убактысында $v$ны турактуу катары кабыл алсак болот. $t$дан $t+dt$ аралыгындагы агып чыккан суунун көлөмүн эки жол менен эсептейбиз. Биринчиден түбүндөгү тешик аркылуу негизинен аянты 0,5 $см^2$ка барабар болгон жана бийиктиги $v\,dt$ болгон цилиндрдин көлөмүнө барабар суу агып чыгат, б.а.

$$-dv = -0,5vdt = -0,3\sqrt{2gh}dt.$$

Экинчиден суунун агып чыгуусунан $h(t)$ терс өсүндүгө $dh$ка ээ болот. Агып чыккан суунун көлөмүнүн дифференциалы төмөнкүдөй:

$$-dv = \pi r^2 dh = \pi \left(htg30\right)^2 dh = \frac{\pi}{3} h^2 dh.$$

Табылган эки көлөмдү барабарлап төмөнкүдөй дифференциалдык теңдеме алабыз

$$\frac{\pi}{3} h^2 dh = -0,3\sqrt{2g}h^{1/2}dt.$$

Бул теңдеме $t$ аргументинен көз каранды функцияны кармабастан өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме.

Өзгөрмөлөрүн ажыратып:

$$dt = -\frac{\pi}{0,9\sqrt{2g}} h^{3/2} dh,$$

$$t = -\frac{\pi}{0,9\sqrt{2g}} \frac{2}{5} h^{5/2} + c \approx -0,0314 h^{5/2} + c.$$

Мында $C$ эркибизче алынган турактуу чоңдук баштапкы шарттан аныкталат. $t=0$ болгондо $h=10$ *см*, мындан $c = 0,0314 \cdot 10^{5/2}$. Демек теңдеменин жеке чыгарылышы:

$$t = 0,0314(10^{5/2} - h^{5/2}).$$

Эгерде идиштеги суунун баары агып бүткөн убакытты табуу керек болсо, анда акыркы формулада $h=0$ десек

$$t = 0,0314 \cdot 10^{5/2} \approx 10 \text{ сек}.$$

1. Төмөндөгү теңдемелер өзгөрмөлөрү ажыралуучубу же жокпу? өзгөрмөлөрү ажыралуучу болсо, анда алардын жалпы чыгарылыштарын тапкыла.

а) $xy' - (1+x)y = 0$, жообу: $y = cx^x e^x$; г) $y' = e^{x-y}$;

б) $xy' + y = y^2$; жообу: $y = \dfrac{1}{1-xc}$; д) $xy' = \sqrt{y}$;

в) $y' = 2^{x+y}$; е) $(1-x)dy - ydx = 0$;

## § 1.2. Бир тектүү дифференциалдык теңдемелер

Бизге туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y(x)\right) \tag{1.2.1}$$

дифференциалдык теңдемеси берилсин.

*Аныктама.* Эгерде $f(x,y)$ функциясы $f(tx,ty) = t^k(x,y), k \geq 0$ шартты канааттандырса, анда ал k– даражадагы бир тектүү функция деп аталат. k=0 болгон учурда (1.1.2) теңдемеси бир тектүү дифференциалдык теңдеме деп аталат жана $y = xz(x)$ (1.2.2) алмаштыруусун колдонуп, (1.2.1) теңдемесин өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемеге алып келүүгө болот. (1.2.2)нин эки жагынан туунду алабыз:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z(x)$$

Акыркы туюнтманы жана (1.2.2)ни (1.2.1) теңдемесине коюп жана $f(x, y)$ функциясынын касиетин колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$xz'(x) + z(x) = f(x, xz) = f(1, z(x))$$

Мындан $xz' = f(1, z) - z$ келип чыгат. Өзгөрмөлөрүн ажыратып төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dz}{f(1,z)-z} = \frac{dx}{x}, \qquad f(1,z) \neq z$$

Эки жагын интегралдасак, анда

$$\int_{f_0}^{z} \frac{ds}{f(1,s)-s} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s} + \ln|c|, \qquad \int_{f_0}^{z} \frac{ds}{f(1,s)-s} = \ln|cx|$$

$\left[f(1,s)-s\right]^{-1}$ функциясынын баштапкы функциясы $F_1(s)$ функциясы болсун дейли, анда акыркы барабардыктан төмөнкүнү алабыз:

$$F_1(z) - F(z_0) = \ln|cx| \text{ же } F_1(z) - F(z_0) = \ln|cx|$$

$F_1(z)$ монотондуу функция, анткени

$$F_1'(z) = \frac{1}{f(1,z)-z} \neq 0$$

Монотондуу функциянын ар дайым тескери функциясы жашашы бизге белгилүү. Демек,

$$z = F_1^{-1}\left[F_1(z_0 + \ln|cx|)\right]$$

Ошентип, $y = xF_1^{-1}\left[F_1(z_0) + \ln|cx|\right]$ берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы болуп эсептелет.

Мисалы: 1. $(x+y)dx - xdy = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла. Берилген теңдемени $y' = \frac{x+y}{x}$ формасында жазалы. Мындан $y' = 1 + \frac{y}{x}, \frac{y}{x} = u(x)$ деп алсак, анда $y = xu(x)$ ал эми $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Жогорудагы алмаштыруунун жана акыркы барабардыктын негизинде берилген теңдемени жаңы изделүүчү функцияга карата жаза алабыз.

$$u'x + u = 1 + u$$

*u*лар жоюшкандан кийин теңдеме төмөнкүдөй жазылат:

$$u'x = 1$$

Бул өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме

$$x\frac{du}{dx} = 1, du = \frac{dx}{x}, u = \ln|x| + \ln|c|, u = \ln|cx|$$

*u*ти табыш үчүн $y/x = u$ алмаштыруусун колдонобуз. $y = xu(x) = x\ln|cx|$ берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы. Чынында эле

$$dy = \ln cx dx + \frac{cx}{cx}dx = (1 + \ln cx)dx = \left(1 + \frac{y}{x}\right)dx$$

$$xdy = (x + y)dx$$

Берилген теңдеменин $x=0$ деген да чыгарылышы бар.

2. $y' = \dfrac{y}{x+y}$ теңдемесин чыгаралы. Оң жагынын алымын жана бөлүмүн *x*-ке бөлсөк, анда

$$y' = \frac{y/x}{1 + y/x}$$

эми $y/x = u$ деп алсак, анда $y = xu(x)$ жана $y' = xu'(x) + u(x)$. Берилген теңдеме *u*-га карата төмөнкүдөй жазылат:

$$u'x + u = \frac{u}{1+u}; \qquad u'x = \frac{u}{1+u} - u = -\frac{u^2}{1+u}; \qquad u'x = -\frac{u^2}{1+u}$$

$$\frac{(1+u)du}{u^2} = -\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{(1+u)du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x} + c, \int\frac{du}{u^2} + \int\frac{du}{u} = -\ln x + c -$$

$$-\frac{1}{u} + \ln|u| = -\ln|x| + c, \qquad \ln|ux| = \frac{1}{u} + c$$

$y=ux$ экендигин эске алсак, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$\ln|y| = \frac{x}{y} + c$$

түрүндө болот.

Төмөндөгү теңдемелерди интегралдагыла.

1) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 2) $xy' = y - x$

3) $y'(xy - y^2) = y^2$; 4) $(x-2y)y' = x + y$

5) $xdy - ydx = ydy$;  6) $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$

7) $y' = e^{y/x} - 1$;  8) $xy' = x + \frac{1}{2}y$

9) $ydx + (x-y)dy = 0$

## § 1.3. Сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

*Аныктама.* Эгерде теңдеме изделүүчү функцияга жана анын туундусуна карата сызыктуу болсо, анда ал биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Сызыктуу теңдеменин жалпы түрү төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x),\ a_1 < x < a_2, -\infty < y < \infty, \tag{1.3.1}$$

мында $a(x), b(x)$, $a_1 < x < a_2$ - интервалында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар. Эгерде $b(x) = 0$ болсо, анда

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \tag{1.3.2}$$

теңдемеси (1.3.1)ге туура келген бир тектүү сызыктуу теңдеме деп аталат. (1.3.2.) теңдемеси §1.1де биз караган өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелер классына кирет. Демек,

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx$$

Эки жагын интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} a(s)ds + \ln|c|,\ \forall x_0 \in (a_1, a_2).$$

Мындан

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds},\qquad c = const \tag{1.3.3.}$$

(1.3.3) функциясы (1.3.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы болуп эсептелет.

(1.3.1)дин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y(x) = v(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \tag{1.3.4.}$$

Мында $v(x)$ – белгисиз функция. Бул метод (1.3.3)дөгү турактуу чоңдукту вариациялоо же Лагранждын методу деп аталат.

$v(x)$ функциясын (1.3.4) аркылуу аныкталган $y(x)$ функциясы (1.3.1) теңдемесин канааттандыра тургандай кылып тандап алабыз. (1.3.4)тү (1.3.1) теңдемесине коебуз. Ал үчүн (1.3.4)түн туундусун табабыз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+v(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}$$

Акыркы туюнтманы жана (1.3.4)тү колдонуп, (1.3.1)ден төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dv}{dx}e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+v(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}=a(x)v(x)e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+b(x),$$

мындан

$$\frac{dv}{dx}=b(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds}$$

Бул теңдеменин эки жагын $dx$ке көбөйтүп, $x_0$дон $x$ке чейин интегралдасак, анда

$$v(x)=\int_{x_0}^{x}b(s)e^{-\int_{x_0}^{s}a(s)ds}ds+c \qquad (1.3.5)$$

(1.3.5)ти (1.3.4.)түн ордуна коюп, (1.3.1) теңдемесинин чыгарылышын табабыз.

$$y(x)=ce^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+\int_{x_0}^{x}b(s)e^{\int_{s}^{x}a(s)ds}ds \qquad (1.3.6)$$

Мында $x_0\in(a_1,a_2)$ каалаган чекит

(1.3.6) формуласы (1.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы болуп эсептелет. (1.3.6)да биринчи кошулуучу (1.3.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы, экинчи кошулуучу (1.3.1) теңдемесинин жекече чыгарылышы. Эгерде (1.3.1) теңдемеси менен катар

$$y(x_0)=y_0 \qquad (1.3.7)$$

шарты берилсе , анда (1.3.1), (1.3.7) Коши маселеси деп аталат. Коши маселесинин чыгарылышын табуу үчүн (1.3.6) дан $x=x_0$ деп жана

(1.3.7) шартын колдонуп, турактуу чоңдукту аныктайбыз: $c=y_0$. Демек, Коши маселесинин чыгарылышы төмөнкүдөй болот:

$$y(x)=y_0e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+\int_{x_0}^{x}b(s)e^{\int_{s}^{x}a(\tau)d\tau}ds \qquad (1.3.8)$$

Эгерде (1.3.1) бир тектүү эмес теңдемесинин бир жеке чыгарылышы белгилүү болсо, анда аны бир тектүү теңдемеге алып келүүгө болот. Мейли Y– (1.3.1)дин белгилүү жеке чыгарылышы болсун. $z$ жаңы изделүүчү функцияны $y$ менен төмөнкү формула аркылуу кийребиз.

$$y=Y+z.$$

Бул формуланы (1.3.1)-ге коюп:

$$\frac{dY}{dx}+\frac{dz}{dx}=a(x)Y+a(x)z+b(x)$$

ээ болобуз.

Мындан $Y(x)$ функциясы (1.3.1)дин чыгарылышы экендигин эске алсак:

$$\frac{dY}{dx}\equiv a(x)Y+b(x)$$

теңдештиги орун алат.

Демек акыркы теңдеме төмөнкү түрдө жазылат:

$$\frac{dz}{dx}=a(x)z.$$

Бул болсо $z$ке карата сызыктуу бир тектүү теңдеме.

Эгерде бир тектүү эмес сызыктуу теңдеменин бир жеке чыгарылышы белгилүү болсо, анда анын жалпы чыгарылышы бир квадратура (интегралдоо) аркылуу табылат. (1.3.1) теңдемесинин эки жеке чыгарылышы белгилүү болсун дейли. Аларды $Y_1(x)$ жана $Y_2(x)$ аркылуу белгилейли. Төмөнкүдөй теңдештиктер орун алат:

$$\frac{dY_1}{dx}\equiv a(x)Y_1+b(x),\qquad \frac{dY_2}{dx}\equiv a(x)Y_2+b(x)$$

Бул эки теңдештиктерди бир биринен кемитип:

$$\frac{d(Y_2-Y_1)}{dx}\equiv a(x)(Y_2-Y_1)$$

теңдештигине ээ болобуз.

Демек $(Y_2-Y_1)$ бир тектүү сызыктуу теңдеменин жеке чыгарылышы. Ошондуктан (1.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y = Y_1 + C(Y_2 - Y_1).$$

Ошондуктан, эгерде бир тектүү эмес сызыктуу теңдемесинин эки жеке чыгарылышын билсек, анда анын жалпы чыгарылышы интегралданбай эле табылат.

*Теорема.* Эгерде $a(x), b(x)$, $a_1 < x < a_2$ интервалында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар болсо,

а) (1.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы (1.3.6.) формуласы менен берилет;

б) (1.3.1), (1.3.7) Коши маселесинин чыгарылышы жалгыз жана (1.3.8.) формуласы менен берилет.

Сызыктуу теңдемелерге жөнөкөй мисалдар келтирели.

1. $y' + 2y = e^x$ теңдемеси берилсин. Буга тийиштүү бир тектүү теңдеме $y' + 2y = 0$ болот.

Бул өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме. Өзгөрмөлөрүн ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dy}{y} + 2dx = 0$$

Мындан $\int \frac{dy}{y} + 2\int dx = \ln c$ же $\ln|y| + 2x = \ln c$, $c$– параметр.

Потенцирлесек, анда $y = ce^{-2x}$ бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы. Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y = c(x)e^{-2x}, \qquad (*)$$

$y'$ ти табалы. $c(x)$ белгисиз функция (*)

$y'(x) = c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x}$, $y(x)$, $y'(x)$ терди берилген теңдемеге коюп, $c(x)$ -ке карата теңдеме алабыз.

$c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x} + 2c(x)e^{-2x} = e^x$, $c'(x)e^{-2x} = e^x$;

$c'(x) = e^{3x}$; $dc(x) = e^{3x}dx$; $c(x) = \int e^{3x}dx + c_1 = \frac{1}{3}e^{3x} + c_1$, $c_1 = const$

$c(x)$тин маанисин (*) барабардыгына коюп, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + c_1\right)e^{-2x} = c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

2. $x^2y'+xy+1=0$ теңдемесин интегралдайлы. Бул теңдемеге тийиштүү бир тектүү теңдеме $xy'+y=0$ болот. Өзгөрмөлөрүн ажыратып, $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$ ээ болобуз. Акыркы теңдеменин жалпы интегралы (чыгарылышы) $\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=\ln c$ болуп эсептелет, же болбосо $\ln|y|+\ln|x|=\ln|c|$.

Потенцирлесек, $y=\frac{c}{x}$ келип чыгат. Эми турактууну кубултуу (вариациялоо) методу боюнча берилген теңдеменин чыгарылышын

$$y(x)=\frac{c(x)}{x} \qquad (*)$$

түрүндө издейбиз. Мындан $y'(x)=x^{-2}(c'(x)x-c(x)).y,y'$ тердин маанилерин берилген теңдемеге койсок, анда

$$x^2x^{-2}(c'(x)x-c(x))+x\frac{c(x)}{x}+1=0$$

$$c'(x)x-c(x)+c(x)+1=0, \qquad c'(x)=-\frac{1}{x}$$

Мындан

$$c(x)=-\int\frac{dx}{x}+c_1=-\ln|x|+c_1=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+c_1,\ c_1-const$$

$c(x)$тин маанисин (*) барабардыгына коюп берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын алабыз.

$$y(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1}{x}\right|+\frac{c_1}{x}.$$

Бернуллинин теңдемеси.

Бул параграфтын аягында Бернуллинин теңдемесине токтолобуз. Көз каранды чоңдукту алмаштыруу жолу менен Бернуллинин теңдемеси сызыктуу теңдемеге алып келинет. Аталган теңдеме төмөнкү түрдө жазылат:

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)y^n \qquad (1.3.9)$$

Мында $a(x), b(x)$, $a_1<x<a_2$ интервалында үзгүлтүксүз функция $n$ – ар кандай чыныгы сан.

$n$=0 болгон учурда (1.3.9) теңдемеси (1.3.1) түрүнө келет, $n$=1 болгон учурда өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме. Демек, биз n≠0,

$n\neq 1$ учурларды карайбыз. (1.3.9) теңдемесинин эки жагын $y^{-n}$ге көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=a(x)y^{1-n}+b(x) \tag{1.3.10}$$

Эми $y^{1-n}=z$ ордуна коюуну колдонобуз, анда

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Ушуларды эске алуу менен (1.3.10) теңдемесинен $z$ке карата төмөнкүдөй теңдемени алабыз:

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)\left[a(x)z+b(x)\right]=(1-n)a(x)z+(1-n)b(x)$$

Бул акыркы теңдеме $z$ке карата бир тектүү эмес сызыктуу теңдеме, мунун чыгарылышы (1.3.6) формуласы боюнча төмөнкүдөй жазылат.

$$z=ce^{(1-n)\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+(1-n)\int_{x_0}^{x}b(s)e^{(1-n)\int_{s}^{x}a(\tau)d\tau}ds$$

Анда Бернуллинин теңдемесинин чыгарылышы

$$y(x)=z^{\frac{1}{1-n}}=\left(ce^{(1-n)\int_{x_0}^{x}a(s)ds}+(1-n)\int_{x_0}^{x}b(s)e^{(1-n)\int_{s}^{x}a(\tau)d\tau}ds\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

түрдө болот.

Мисал: төмөнкү теңдеменин чыгарылышын тапкыла.

$$y'+2y=y^2e^x \tag{1.3.11}$$

Бернуллинин теңдемеси $n=2$ болгон учурда. (1.3.11) теңдемесинин эки жагын $y^{-2}$ ге көбөйтүп, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$y'y^{-2}+2y^{-1}=e^x \tag{1.3.12}$$

$$z=y^{-1} \tag{1.3.13}$$

ордуна коюуну колдонобуз. Акыркы функциянын туундусун эсептеп,

$$z'=-y^{-2}y' \text{ ке ээ болобуз.} \tag{1.3.14}$$

Алынгандарды эске алып, акыркы теңдемеден төмөнкүнү алабыз.

$$-z'+2z=e^x \tag{1.3.15}$$

Демек $z$ функциясына карата сызыктуу бир тектүү эмес теңдеме алдык.

(1.3.15)ке туура келген бир тектүү теңдеме төмөнкүдөй болот.

$$-z'+2z=0 \tag{1.3.16}$$

Мындан өзгөрмөлөрүн ажыратып, интегралдап,

$$z(x)=ce^{2x} \text{ ке ээ болобуз} \tag{1.3.17}$$

Турактуу чоңдукту вариациялап, төмөнкүнү алабыз:

$$z(x)=c(x)e^{2x} \tag{1.3.18}$$

Туундусун эсептесек: $z'(x)=c'(x)e^{2x}+2c(x)e^{2x}$. Бул маанилерди (1.3.15)ке коюп, $-c'(x)e^{2x}=e^{x}$ ке ээ болобуз. Акыркы теңдемени интегралдап

$$\left.\begin{aligned} c(x)&=e^{-x}+c_1 \\ z(x)&=c_1e^{2x}+e^{x} \end{aligned}\right\} \text{ди алабыз.}$$

$y=1/z$ экендигин эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x)=\frac{1}{c_1e^{2x}+e^{x}}.$$

Бул берилген Бернуллинин теңдемесинин жалпы чыгарылышы.

Төмөнкүдөй сызыктуу эмес теңдеме карайбыз.

$$(xa(y)+x^{n}b(y))\frac{dy}{dx}=c(y), \qquad n\neq 0, \quad n\neq 1$$

Эгерде бул теңдемеде $x$ти утен изделүүчү функция катары карасак, анда $x$ функциясына карата төмөнкүдөй Бернуллинин теңдемесин алабыз:

$$c(y)\frac{dx}{dy}=xa(y)+b(y)x^{n}$$

Бул теңдемени жогорку жол менен чыгарууга болот.

*Мисал:* $(2x^2y\ln y-x)y'=y$

Теңдемени төмөнкү түрдө жазабыз.

$$2x^2y\ln y-x=y\frac{dx}{dy}$$

Демек $x$ изделүүчү функциясына карата Бернуллинин теңдемеси $n=2$.

Бул теңдеменин эки жагын $x^{-2}$ге көбөйтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$yx^{-2}\frac{dx}{dy}=-x^{-1}+2y\ln y,$$

же

$$z(y)=x^{-1}(y)$$

белгилесек жана туундусун эсептеп, буларды ордуна койсок,

$$-y\frac{dz}{dy}=-z+2y\ln y,$$

$z$ке карата бир тектүү эмес сызыктуу теңдеме. Буга туура келген бир тектүү теңдеме:

$$-y\frac{dz}{dy}=-z$$

өзгөрмөлөрүн ажыратып, интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$z=c\cdot y$$

Турактуу чоңдукту вариациялап, $z(y)=c(y)\cdot y$ түрүндө издеп, туундусун эсептеп, $z'(y)=c'(y)\cdot y+c(y)$ бир тектүү эмес теңдеменин ордуна коюп, $-y^2c'(y)=2y\ln y$ ке ээ болобуз.

Мындан

$$\frac{dc}{dy}=-\frac{2}{y}\ln y \quad же \quad dc=-2\ln y d\ln y \quad \text{интегралдап,}$$

$$c(y)=-(\ln y)^2+c_1$$

Демек,

$$z(y)=c_1y-y\ln^2 y$$

$x=1/z$ экендигин эске алсак,

$$x=\frac{1}{c_1y-y\ln^2 y} \qquad же \qquad x(c_1y-y\ln^2 y)=1$$

берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы. Төмөнкү теңдемелердин чыгарылыштарын тапкыла:

1) $xy'-2y=2x^4$

2) $y'+ytgx=\sec x$

3) $(2x+1)y'=4x+2y$

4) $\left(x+y^2\right)dy=ydx$

5) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$

## § 1.4. Биринчи тартиптеги теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы жана анын жалгыздыгы жөнүндөгү теорема

Туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.4.1}$$

Мында $f(x,y)$, $xOy$ – тегиздигинин G областында аныкталган $x, y$ аргументтери боюнча үзгүлтүксүз функция. Биз G областында жаткан төмөнкүдөй R тик бурчтукту карайбыз.

$R \equiv \{|x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$, мында a,b берилген оң сандар, $(x_0 y_0)$ тик бурчтуктун борбору. (1.4.1) теңдемесинин

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.4.2}$$

шартын канааттандырган чыгарылыш $f(x,y)$ функциясы кандай касиетке ээ болгондо жашаарын жана жалгыз болоорун далилдейбиз. Эгерде $|y_1 - y_0| \le b |y_2 - y_0| \le b |x - x_0| < a$, шартын канааттандырган чекиттери үчүн

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le N|y_1 - y_2| \tag{1.4.3}$$

шарты орундалса, мында N областтан көз каранды болгон, бирок x,уген көз каранды болбогон турактуу чоңдук, анда $f(x,y)$ функциясы $y$ аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырат дейбиз.

$f(x,y)$ функциясы R тик бурчтугунда $x$, $y$ боюнча үзгүлтүксүз болсун, анда ал Вейерштрасстын теоремасы боюнча ушул тик бурчтукта чектелген болот, б.а.

$$|f(x,y)| \le M - const \tag{1.4.4}$$

$x, y \in R$ – бардык чекиттери үчүн.

*Теорема 1.4.1.* Эгерде $f(x,y)$ функциясы *(x,y)* аргументтери боюнча $R$ туюк тик бурчтугунда үзгүлтүксүз болсо жана ал $y$ аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырса, анда (1.4.1), (1.4.2) Коши маселесинин чыгарылышы $|x - x_0| \le h, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ сегментинде жашайт жана жалгыз болот.

*Далилдөө* (1.4.1), (1.4.2) Коши маселеси төмөнкүдөй интегралдык теңдемеге эквиваленттүү

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)ds \qquad (1.4.5)$$

Чындыгында, эгерде $y = \phi(x)$ (1.4.1), (1.4.2) маселесинин чыгарылышы болсо, анда

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \equiv f(x, \phi(x)), \quad \phi(x_0) = y_0 \text{ болот.}$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын $dx$ -ке көбөйтүп, $x_0$дөн $x$ке чейин интегралдап жана баштапкы шартты колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\phi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds$$

б.а. $\phi(x)$ (1.4.5) интегралдык теңдеменин чыгарылышы болот. Тескерисинче, $\phi(x)$ (1.4.5) интегралдык теңдемесин канааттандырса

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds$$

Эгерде бул теңдештиктин эки жагына $x = x_0$ маанисин койсок, төмөнкүнү алабыз: $\phi(x_0) = y_0$, б.а. $\phi(x)$ (1.4.2) баштапкы шартын канааттандырат. Ошол эле теңдештиктин эки жагын $x$ боюнча туундуласак, $f(x, \phi(x))$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде төмөнкүнү алабыз. $\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$, б.а. $y = \phi(x)$ (1.4.1) теңдемесин жана (1.4.2) шартын канааттандырат. Демек, (1.4.5) интегралдык теңдемесининин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдесек, мындан теореманын далилдөөсү келип чыгат. (1.4.5) интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жашашын удаалаш жакындатуу методу менен далилдейбиз. Нөлдүк жакындатуу функциясы үчүн $y_0$-ду алабыз, ал эми калган жакындашууларды төмөнкү формула менен аныктайбыз:

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{k-1}(s))ds, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1.4.5)_k$$

Демек, $(1.4.5)_k$ формуласы аркылуу $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функционалдык удаалаштык түзүлөт. $(1.4.5)_k$ формуласынан $f(x, \phi(x))$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде удаалаштыктын ар бир мүчөсү үзгүлтүксүз функция экендиги жана $y_k(x_0)=y_0$ баштапкы шартын канааттандырарлыгы келип чыгат.

Эгерде $|x-x_0|\le h$ болсо удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $R$ тик бурчтугунда жата тургандыгын көрсөтөбүз. Чындыгында (1.4.5)$k$дан төмөнкүнү алабыз:

$$|y_k(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{k-1}(s)ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(s,y_{k-1}(s)ds\right|\right|$$

Мындан $k$=1 болгондо төмөнкүнү алабыз:

$$|y_1(x)-y_0|\le M|x-x_0|\le Mh\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

б.а. $y_1(x)$ тик бурчтукта жатат.

Ошол эле барабарсыздыктан $k$=2 болгондо, төмөнкүнү алабыз:

$$|y_2(x)-y_0|\le\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s)ds\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b$$

Анткени $y_1(x)\in R$, анда $|f(s,y_1(s))|\le M$.

Математикалык индукция методу менен $y_k(x)\in R$ десек, анда $y_{k+1}(x)\in R$ экендигин көрсөтөбүз:

$$|y_{k+1}(x)-y_0|\le\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_k(s)ds\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

б.а. $y_{k+1}(x)\in R$.

Бул удаалаштык $|x-x_0|\le h$ сегментинде бир калыпта жыйнала тургандыгын көрсөтөбүз. Удаалаштык менен кошо төмөнкүдөй функционалдык катарды карайбыз:

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+[y_2(x)-y_1(x)]+...+[y_k(x)-y_{k-1}(x)]+... \quad (1.4.6)$$

Бул катардын $k$ мүчөсүнүн суммасы удаалаштыктын $k$ –гы мүчөсүнө барабар. Демек, удаалаштык менен (1.4.6) функционалдык катардын жыйналышы тең күчтө. (1.4.6) функционалдык катарынын жыйналуучулугун далилдейбиз. Ал үчүн (1.4.6) катарынын ар бир мүчөсүн баалап (1.4.6)га мажоранттык сандык катар түзөбүз. $k$=1 болгондо $(1.4.5)_1$ден төмөнкүнү алабыз:

$$|y_1-y_0|\le M|x-x_0| \quad (1.4.6_1)$$

Андан ары $(1.4.5)_k$дан k=2 болгон учурдан k=1 болгон учурду кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|y_2 - y_1| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s) - f(s, y_0(s)| ds \right| \le N \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)| ds \right| \le MN \frac{|x - x_0|^2}{2} \qquad (1.4.6_2)$$

Мында биз Липшицтин шартын колдондук.

Ушуга окшош эле $k$=3 учурдан $k$=2 болгон учурду кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \right| \le N \left| \int_{x_0}^{x} |y_2(s)) - y_1(s))| ds \right| \le$$

$$\le MN^2 \int_{x_0}^{x} \frac{|s - x_0|^2}{2} ds = MN^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!} \qquad (1.4.6_3)$$

Төмөнкүдөй барабарсыздыктын орун ала тургандыгын математикалык индукция методу менен көрсөтүүгө болот.

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \le MN^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \qquad (1.4.6_k)$$

Бул барабарсыздыктын $k$=1,2,3 учурундагы тууралыгы $(1.4.6_1)$ – $(1.4.6_3)$төн келип чыгат. $(1.4.6_k)$ $k$=$n$ болгондо туура болсун, анын $k$=$n$+1 болгондо $(1.4.6_k)$нын $k$=$n$+1 болгондо туура болорун көрсөтөбүз. $(1.4.5_k)$дан $k$=$n$+1 учурунан $k$=$n$ учурун кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(s, y_n(s)\right) - f\left(s, y_{n-1}(s)\right) \right| ds \right| \le N \left| \int_{x_0}^{x} \left(y_n(s) - y_{n-1}(s)\right) ds \right| \le$$

$$\le N \frac{MN^{n-1}}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} |s - x_0|^n ds \right| = \frac{MN^n}{n!(n+1)} |x - x_0|^{n+1} = \frac{MN^n |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (1.4.6_{n+1})$$

Каалаган $k$ саны үчүн $(1.4.6_k)$ барабарсыздыгынын тууралыгы далилденди. (1.4.6) функционалдык катарынын ар бир мүчөсү сандык катардын тиешелүү мүчөлөрү менен чектелет:

$$|y_0(x)| + |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x)| + \ldots + |y_k(x) - y_{k-1}(x)| + \ldots$$

$$\le |y_0| + Mh + NM \frac{h^2}{2!} + \ldots + N^{k-1} M \frac{h^k}{k!} + \ldots \qquad (1.4.7)$$

(1.4.7) сандык катарынын жыйналуучулугун Даламбердин белгиси менен далилдейбиз:

$$a_k = \frac{N^{k-1}Mh^k}{k!}; \qquad a_{k+1} = \frac{N^k Mh^{k+1}}{(k+1)!}$$

Төмөнкүдөй катыштын пределин табабыз:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{N^k Mh^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{N^{k-1}Mh^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{Nh}{k+1} = 0 < 1$$

Демек, Даламбердин белгисинин негизинде (1.4.7) сандык мажоранттык катары жыйналуучу катар. Анда, Вейерштрасстын теоремасынын негизинде (1.4.6) функционалдык катары $|x - x_0| \le h$ сегментинде бир калыпта абсолюттук жыйналат жана суммасы ушул сегментте үзгүлтүксүз функция болот. Биз ушул катардын суммасы $y(x)$ функциясы болсун дейли. Бул функция $y(x_0) = y_0$ баштапкы шартты канааттандырат.

Ушул функция (1.4.5) интегралдык теңдемесин канааттандыра тургандыгын далилдейбиз.

Катар менен удаалаштыктын жыйналуучулугу тең күчтө болгондуктан, төмөнкүдөй предел орун алат:

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y(x) \tag{1.4.8}$$

(1.4.8) барабардыгы $|x - x_0| \le h$ үчүн бир калыпта орун алат. Демек, каалаган $\delta > 0$ саны үчүн $N(\delta)$ номери табылып, бардык $|x - x_0| \le h$ үчүн төмөнкү барабарсыздык орун алат:

$$|y_k(x) - y(x)| < \delta, \qquad k > N(\delta)$$

$f(s, y(s))$ функциясынын $y$ аргументи боюнча үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $|y_k(s) - y(s) < \delta(\varepsilon)|$ болгондо, $|f(s, y_k(s)) - f(s, y(s))| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta(\varepsilon)$ саны табылат. Акыркы барабарсыздык $k > N(\delta(\varepsilon))$ болгондо орун алат.

Бул барабарсыздыкты колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$\left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_k(s)) - f(s, y(s))| ds\right| \le \varepsilon |x - x_0| \le \varepsilon h \tag{1.4.9}$$

Эгерде $k > N_0(\varepsilon)$ болсо, $(1.4.5_k)$ формуласынан

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \{f(s, y_k(s)) - f(s, y(s))\} ds + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) ds \text{ ти алабыз.}$$

Акыркы барабардыктан $k \to \infty$ пределге өтүп жана (1.4.8), (1.4.9) ду эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)) ds \tag{1.4.10}$$

Демек, $y(x)$ интегралдык теңдеменин чыгарылышы. Эми ушул чыгарылыштын жалгыздыгын далилдейбиз. Тескерисинче (1.4.5) теңдемесинин $y(x)$тен бөлөк $|x - x_0| \le h$ сегментинде аныкталган үзглтүксүз $z(x)$ чыгарылышы болсун. Анда $z(x_0) = y(x_0) = y_0$ шартын канааттандырат. $\phi(x) = z(x) - y(x)$ функциясын карайбыз. Бул функция $|x - x_0| \le h$ сегментинде үзгүлтүксүз. $\phi(x)$ функциясы нөлгө барабар болбогон сегмент $[x_1, x_1 + \theta]$ болсун дейли, мында $\theta$ жетишээрлик кичине оң сан.

Вейерштрасстын теоремасынын негизинде $\phi(x)$ функциясы $[x_1, x_1 + \theta]$ сегментинин $x'$ чекитинде максимумга ээ болсун дейли жана ал максимум $M$ге барабар болсун, б.а. $\phi(x') = M$. Бардык $x \in [x_1, x_1 + \theta]$ үчүн $\phi(x') \le M . z(x)$ (1.4.10 теңдемесин канаатандыргандыктан

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s)) ds \tag{1.4.11}$$

(1.4.10)дон (1.4.11)ди мүчөлөп кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|z(x) - y(x)| = \left| \int_{x}^{x} |f(s, z(s)) - f(s, y(s)) ds| \right| \le N \left| \int_{x}^{x} |z(s) - y(s) ds| \right|$$

Бул акыркы барабарсыздыкка Липшицтин шартын колдондук. Демек,

$$\phi(x) \le N \left| \int_{x_0}^{x} \phi(s) ds \right|$$

Эки жагына $x = x'$ деп төмөнкүгө ээболобуз.

$$M \le NM\theta \text{ же болбосо } 1 \le N\theta .$$

Кичине сан $\theta$ ны $N\theta < 1$ болгондой кылып тандап алабыз. Анда акыркы барабарсыздыктан төмөнкүгө ээ болобуз, 1<1 бул карама-каршылык $z(x) \neq y(x)$ деген туура эместигин көрсөтөт. Теорема толук далилденди.

Мисал: Төмөнкү Коши маселесинин чыгарылышынын жашашын далилдегиле:

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \quad -1 \le x, \quad y \le 1.$$

Берилген маселе төмөнкүдөй интегралдык теңдемеге тең күчтө

$$y(x) = \int_0^x (s - y^2(s))ds = \frac{x^2}{2} - \int_0^x y^2(s)ds.$$

Теоремадагы турактуу чоңдуктар төмөнкүдөй мааниге ээ:

$$M = \left|x - y^2\right| \le 2, \qquad h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \le |2y| \le 2, \qquad N = 2.$$

Нөлүнчү жакындаштыруу үчүн $y_0(x) = 0$ функциясын алабыз. Ал эми $k$чы жакындаштырууну

$$y_k(x) = \frac{x^2}{2} - \int_0^x y_{k-1}^2(s)ds, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

формуласы аркылуу аныктайбыз.

Мындан $k$=1 деп:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$k = 2$$

деп $y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{s^4}{4} ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$

k=3 деп

$$y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \int_0^x y_2^2(s)ds = \frac{x^2}{2} - \int_0^x \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{20}\right)^2 ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} - \frac{x^{11}}{20^2 \cdot 11} + \frac{x^8}{20 \cdot 8}$$

Төмөнкүдөй катар түзөбүз

$$y_0(x) + \left[y_1(x) - y_0(x)\right] + \left[y_2(x) - y_1(x)\right] + \left[y_3(x) - y_2(x)\right] + \ldots.$$

Биз далилдеген барабарсыздыктын негизинде

$$\left|y_3(x)-y_3(x)\right|\le MN^2\frac{\left|x-x_0\right|^3}{3!}=MN\frac{\left|x\right|^3}{3!};$$

Ошондой эле каалаган натуралдык сан $n$ үчүн:

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le MN^{n-1}\frac{\left|x\right|^n}{n!}$$

барабарсыздыгы туура болот.

Демек мажоранттык жыйналат жана удаалаштыгы

$$\left\{\frac{x^2}{2};\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20};\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}-\frac{x^{11}}{20^2\cdot 11}+\frac{x^8}{20\cdot 8},\ldots\right\}$$

берилген теңдеменин чыгарылышына жыйналат.

## § 1.5. Толук дифференциалдык теңдеме жана интегралдоочу көбөйтүүчү

Туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги теңдемени карайбыз

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

же болбосо

$$dy-f(x,y)dx=0$$

Бул теңдеменин эки жагын $N(x,y)$ функциясына көбөйтүп, симметриялуу түрдө төмөнкүчө жазабыз:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1.5.1)$$

Эгерде (1.5.1)дин сол жагы V(x,y) функциясынын толук дифференциалы болсо, башкача айтканда

$$dV(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy \qquad (1.5.2)$$

барабардыгы орун алса, анда (1.5.1) толук дифференциалдык теңдеме деп аталат. Анда $V(x,y)=c$ (1.5.1) теңдемесинин чыгарылышы болот. $V(x,y)$ функциясынын толук дифференциалын жазалы:

$$dV(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy$$

(1.5.2) менен салыштырсак, анда

$$M = \frac{\partial V}{\partial x}, N = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Эгерде $N(x, y) \neq 0$ болсо, анда айкын эмес функциянын теоремасы боюнча $V(x, y) - V(x_0, y_0) = 0$ теңдемесин $y$ аргументине карата чыгарууга болот:

$$y = \phi(x, c)$$

Анда ушул функция (1.5.1) теңдемесин канааттандырат. Чындыгында $V(x, y) = c$ барабардыгын туундулусак,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

же болбосо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial y}} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Бул маанини (1.5.1) теңдемесине коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$M(x, y) + N(x, y\left(-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}\right) = M(x, y) - M(x, y) = 0$$

Эгерде (1.5.1) толук дифференциалдык теңдеме болсо, төмөнкү барабардык орун алат:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial V}{\partial y} = N(x, y)$$

Мындан биринчи барабарсыздыкты $y$, экинчисин $x$ боюнча жекече туундуласак, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

*V(x,y)* функциясынын аралаш туундулары барабар болгондуктан;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.5.3}$$

барабардыгына ээ болобуз:

(1.5.3.) шарты (1.5.1)дин толук дифференциалдык теңдеме болушунун зарыл шарты. Бул шарт Эйлердин шарты деп аталат.

Эми (1.5.3) жетишээрлик шарт экендигин далилдейбиз, б.а. $V(x,y)$ функциясын табабыз.

$\partial V = M(x,y)\partial x$ тин эки жагын $x$ боюнча $x_0$дөн $x$ке чейин интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$V(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \phi(y) \tag{1.5.4}$$

Мында $\phi(y)$ эркибизче алынган функция. Акыркы барабардыкты $y$ боюнча туундулап, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(s,y)}{\partial y} ds + \phi'(y)$$

же $\dfrac{\partial V}{\partial y} = N(x,y)$ жана $\dfrac{\partial M}{\partial y}(s,y) = \dfrac{\partial N}{\partial s}(s,y)$ экендигин эске алып:

$$N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(s,y)}{\partial s} ds + \phi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \phi'(y).$$

Мындан

$$\phi'(y) = N(x_0,y), \frac{d\phi}{dy} = N(x_0,y)$$

Акыркы барабардыкты $dy$ке көбөйтүп, $y$ боюнча интегралдасак, анда

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0.s)ds + c$$

$\phi(y)$ тин маанисин (1.5.4)кө коюп,

$$V(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds = C$$

(1.5.1) теңдемесининин жалпы интегралы болот. Эгерде (1.5.3) шарты аткарылбаса, анда (1.5.1) толук дифференциалдык болбойт. (1.5.1) теңдемесинин эки жагын $\mu(x,y) \neq 0$ функциясына көбөйтсөк, келип чыккан теңдеме толук дифференциалдык болобу жана ушундай функция жашайбы деген суроону коебуз. (1.5.2) нин эки жагын $\mu(x,y)$ ке көбөйтсөк, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0 \tag{1.5.4}$$

пайда болгон теңдеме үчүн (1.5.3) шарты төмөнкүчө жазылат:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

же ачып жазганда, шарт төмөнкүчө жазылат:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M(x,y)+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N(x,y)+\mu\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1.5.5)$$

Эгерде $\mu(x,y)$ ушул теңдеменин чыгарылышы болсо, анда (1.5.4) толук дифференциалдык теңдеме болот. (1.5.5) теңдемеси жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме. Мунун чыгарылышын табуу (1.5.1)дин чыгарылышын табуудан жеңил эмес. Бирок кээ бир теңдемелер үчүн жалаң $x$тен же $y$тен көз каранды болгон интегралдык көбөйтүүчүнү табууга болот. Маселен, $\mu(x,y)$ $x$тен эле көз каранды болсун дейли, анда (1.5.5)тен төмөнкүнү алабыз:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d\mu}{dx}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

же

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$$

жалгыз $x$тен көз каранды болгон интегралдык көбөйтүүчүнүн жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N(x,y)}$$

туюнтмасы $x$тен гана көз каранды функция болушу керек. Анда акыркы теңдеменин эки жагын интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}ds}$$

Ушундай эле жол менен жалгыз $y$тен көз каранды болгон интегралдык көбөйтүүчүнү табууга болот. Кээ бир теңдемелер үчүн интегралдык көбөйтүүчүнү табабыз:

$$y'=a(x)b(y) \quad же \qquad a(x)b(y)dx-dy=0$$

Мында $M(x,y)=a(x)b(y), \quad N(x,y)=-1$. Андыктан

$$\frac{\partial M}{\partial y}=a(x)b'(y), \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

Демек,

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}=\frac{-a(x)b'(y)}{a(x)b(y)}=-\frac{b'(y)}{b(y)}$$

Анда

$$\ln\mu(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{b'(s)}{b(s)}ds=\ln(b(y))^{-1} \qquad \mu(y)=\frac{1}{b(y)}.$$

Бир тектүү дифференциалдык теңдеме берилсин

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

Мында $y=xU(x)$ деп алсак, анда $dy=U(x)dx+xdU$. Ушуну колдонуу менен төмөнкүнү алабыз:

$$M(x,xU(x))dx+N(x,xU)(Udx+xdU)=0,$$

$$x^{m}M(1,U)dx+x^{m}N(1,U)Udx+x^{m+1}N(1,U)dU=0,$$

$$x^{m}\left[M(1,U)dx+N(1,U)U\right]dx+x^{m+1}N(1,U)dU=0,$$

Анда интегралдык көбөйтүүчү төмөнкү функция болот:

$$\frac{1}{x^{m+1}\left[M(1,U)+UN(1,U)\right]}$$

же $U=\dfrac{y}{x}$ экендигин эске алсак, анда интегралдоочу көбөйтүүчү төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

Мисал: Төмөнкү теңдеменин интегралдык көбөйтүүчүсүн тапкыла:

$$\frac{dy}{dx}=xy+\sin x \tag{1.5.6}$$

же

$$(xy+\sin x)dy-dy=0.$$

Демек

$$M(x,y) = xy + \sin x; \quad N(x,y) = -1.$$

Мындан

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Ошондуктан бул теңдеме $x$ тен көз каранды интегралдык көбөйтүүчүгө ээ болот

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x-0}{-1} = -x$$

же

$$\ln \mu = -\frac{x^2}{2} + \ln C; \quad \mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Бул функцияга көбөйтсөк, толук дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз

$$e^{-\frac{x^2}{2}}(xy + \sin x)dy - e^{-\frac{x^2}{2}}dy = 0.$$

Мындан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\frac{x^2}{2}}xy + e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.5.7}$$

же интегралдап

$$u(x,y) = y\int_{x_0}^{x} se^{-\frac{s^2}{2}}ds + \int_{x_0}^{x} se^{-\frac{s^2}{2}}\sin s ds + \phi(y) \tag{1.5.8}$$

Эки жагынан $y$ боюнча жекече туундусун эсептесек

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + \phi'(y)$$

же (1.5.7)нин экинчи шартын алып:

$$-e^{-\frac{x^2}{2}} + \phi'(y) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\phi(y) = c$ боло тургандыгын табабыз.

Табылган маанисин (1.5.8)ке коюп

$$y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} \sin s ds$$

берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын таптык.

## § 1.6. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ теңдемесинин чыгарылышынын өзгөчө чекити

Бизге биринчи тартиптеги төмөнкүдөй теңдеме берилсин.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \tag{1.6.1}$$

Мында $a, в, c, d$ – берилген турактуу сандар. $x=0$, $y=0$ чекитинде (1.6.1) теңдемесинин оң жагы $\frac{0}{0}$ аныксыздык болот.

Эгерде $x$ жана $y$ (0,0) чекитине $ax+by=0$ түз сызыгында жатып, $cx+dy \neq 0$ болуп, умтулса, анда $\frac{dy}{dx} = 0$. Ал эми $x, y$ (0,0) чекитине $cx+by=0$ түз сызыгы боюнча умтулса, $ax+by \neq 0$ болсо, анда $\frac{ax+by}{cx+dy} \to \infty$ болот. Бул учурда $\frac{dx}{dy} = 0$ теңдемесин карайбыз.

Биз (1.6.1) теңдемесинин бөлүмү жана алымы бир эле убакта нөлгө умтулганын карайбыз.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Берилген $a, в, c$ жана $d$ сандары төмөнкү шартты аткарсын.
(1.6.1) теңдемесинде төмөнкүдөй ордуна коюуну жүргүзөбүз.

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ сандарын (1.6.1) теңдемеси төмөнкү түргө келгендей кылып тандап алабыз.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\eta}{\xi} \tag{1.6.3}$$

(1.6.2)ден төмөнкүгө ээ болобуз.

$$d\xi = \alpha dx + \beta dy, \qquad d\eta = \gamma dx + \delta dy$$

Демек,

$$\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)=\lambda(\gamma x+\delta y),$$
$$\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)=\mu(ax+\beta y).$$

Мындан

$$\left.\begin{array}{l}\gamma(c-\lambda)+\delta a=0\\ \gamma d+\delta(b-\lambda)=0\end{array}\right\} \qquad (1.6.4)$$

Ошондой эле экинчи катыштан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases}\alpha(c-\mu)+\beta a=0\\ \alpha d+\beta(b-\mu)=0\end{cases} \qquad (1.6.4')$$

(1.6.4) бир тектүү алгебралык системасы качан гана анын аныктагычы нөлгө барабар болгондо, нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот. Демек,

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad же \qquad \lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0 \quad (1.6.5)$$

(1.6.5) квадраттык теңдеме. Төмөнкүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

*1-учур.* (1.6.5) теңдемеси эки чыныгы тамырга ээ болсун жана алар бир белгиде болсун

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

(1.6.4) бир тектүү эмес системасы $\alpha, \beta$ га карата качан гана алардын коэффициентинен түзүлгөн аныктагыч нөлгө барабар болгондо, нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот:

$$\begin{vmatrix} c-\mu & a \\ d & b-\mu \end{vmatrix}=0 \qquad же \qquad \mu^2-(b+c)\mu+bc-ad=0 \quad (1.6.5')$$

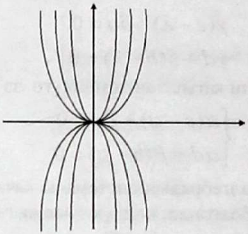
Демек, (1.6.5), $(1.6.5^1)$ менен дал келет. Ошондуктан, $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\lambda_2$ деп алсак, (1.6.3.) теңдемеси төмөнкү түрдө жазылат:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}.$$

өзгөрмөлөрүн ажыратып, интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\ln|\eta| = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln|\xi| + \ln|c|,\ \eta = c\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tag{1.6.7}$$

Бул учурда бардык чыгарылыш (0,0) чекити аркылуу өтөт жана өзгөчө чекит түйүн деп аталат. Бардык чыгарылыш (0,0) чекитинде жанымага ээ болот (1-чийме).



*1-чийме*

Чындыгында $\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\lambda_1}{\lambda_2}c\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\right|_{\xi=0} = 0$

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \quad \text{жана} \quad |\lambda_1| > |\lambda_2|, \lambda_1 < \lambda_2$$

Демек чыгарылыш

$$\eta = c\xi^{\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}}$$

(0,0)чекити жогоркудай эле түйүн болот.

*2-учур.* (1.6.5) теңдемеси чыныгы жана ар түрдүү белгидеги тамырга ээ болсун, б.а.

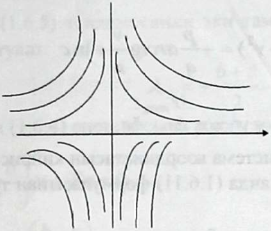
$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0, |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

Демек, (1.6.3) теңдемеси төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\eta}{\xi} \qquad \text{же} \qquad \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \eta = c\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \tag{1.6.8}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

Бул учурда (0,0) чекити аркылуу $\xi = 0 \quad \eta = 0$ чыгарылыштар гана өтөт. Калган чыгарылыштар (0,0) чекити аркылуу өтпөйт. Бул учурда өзгөчө чекит ээрче деп аталат. (2-чийме).



*2-чийме*

*3-учур.* (1.6.5) теңдемеси комплекстүү тамырларга ээ болсун. Бул учурда эки тамыр түйүндөш сандар болушат:

$$\lambda_1 = p + iq, \qquad \lambda_2 = p - iq,$$

$\lambda_1 = p + iq$ маанисин (1.6.4) системасына коюп, $\gamma$ жана $\delta$ чоңдуктарын аныктайбыз. Алар комплекстүү сандар болот. $\lambda_1 = p - iq$ маанисин (1.6.4[1])не коюп, $\alpha, \beta$ санын аныктайбыз алар $\gamma, \delta$ санына түйүндөш болот. Демек (1.6.2) формуласынан $\xi$ жана $\eta$ чоңдуктары түйүндөш экендиги келип чыгат.

$u = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \qquad v = \dfrac{\xi - \eta}{2i}$ десек, анда $u$ жана $v$ чыныгы сандар болот жана

$$\xi = u + iv, \qquad \eta = u - iv \tag{1.6.9}$$

формуласын (1.6.3) кө коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{du - idv}{du + idv} = \frac{p + iq}{p - iq} \cdot \frac{u - iv}{u + iv} \tag{1.6.10}$$

же

$$-q(+vdv + udu) = p(udv - vdu)$$

Эки жагын $u^2 + v^2$ бөлүп, акыркы теңдемени төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{vdv + udu}{u^2 + v^2} = -\frac{p}{q} \cdot \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}.$$

Мындан

$$\frac{1}{2}\frac{d(v^2+u^2)}{u^2+v^2}=-\frac{p}{q}darctg\frac{v}{u}$$

Эки жагын интегралдап,

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)=-\frac{p}{q}arctg\frac{v}{u}+\ln c$$

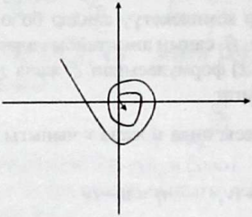
$$u^2+v^2=e^{-\frac{2p}{q}arctg\frac{v}{u}}c.$$

Эгерде биз полярдык система координатасын кийрисек: $u=r\cos\phi$, $v=z\sin\phi$, анда (1.6.11) формуласынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$r^2=e^{-\frac{2p}{q}\phi}\cdot c;\quad r=e^{-\frac{p}{q}\phi}c \qquad 0\le\phi<2\pi \tag{1.6.12}$$

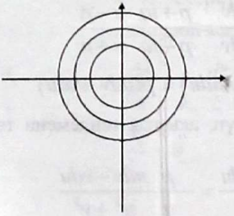
Бул учурда өзгөчө чекит фокус деп аталат.

Эгерде p, q бир белгиде болсо, (0,0) чекити турумдуу деп аталат. Эгерде p, q ар түрдүү белгиде болсо, (0,0) өзгөчө чекити турумдуу эмес деп аталат. (3-чийме).



*3-чийме*

*4- учур.* Эгерде $p$=0 болсо, өзгөчө чекит борбор деп аталат. $r=c$.



*4-чийме*

*5-учур.* (1.6.5) теңдемесинин эки тамыры дал келсин дейли, б.а.

$$(b+c)^2-4(bc-ad)=0$$
$$b^2+2bc+c^2-4bc+4ad=0,\ (b-c)^2+4ad=0.$$

Бул учурда (1.6.5) теңдемесинин эки тамыры төмөнкүдөй формула менен туюнтулат:

$$\lambda_{1,2}=+\frac{b+c}{2}$$

Бул маанини (1.6.4) системасына коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{c-b}{2}\right)\alpha+\beta a=0\\[2mm] \gamma d+\beta\left(\dfrac{b-c}{2}\right)=0\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{c-b}{2} & a\\ d & \dfrac{b-c}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}2(b-c)^2-ad=-\frac{1}{4}((b-c)^2+4ad)=0$$

Эгерде $a\neq 0$ десек, анда берилген системанын чыгарылышы төмөнкүдөй:

$$\alpha=1;\beta=\frac{b-c}{2a}.$$

Демек,

$$\xi=ax+\frac{b-c}{2}y \qquad (1.6.13)$$

Бул учурда (1.6.4') системасы ушундай эле чыгарылышка ээ болот.

Ошондуктан,

$$\eta=y \qquad (1.6.14)$$

Анда (1.6.2) өзгөртүүсүнүн аныктагычы төмөнкүдөй болот.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & \dfrac{b-c}{2a}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=a\neq 0$$

(1.6.13), (1.6.14) ордуна коюсу (1.6.1) теңдемесин төмөнкү түргө алып келет.

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda(ax+dy)+b(ax+dy)}{x\xi}=\frac{ax+by}{x\xi}, \qquad (1.6.15)$$

Анткени,

$$\gamma=0, \quad \delta=1.$$

(1.6.15)тен, (1.6.13), (1.6.14)тү эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta}{\xi}+\frac{1}{\lambda} \qquad (1.6.16)$$

Бул сызыктуу бир тектүү эмес теңдеме. (1.6.16) теңдемесинин чыгарылышы төмөнкүдөй болот.

$$\eta=\frac{1}{\lambda}\xi\ln|\xi|+c_1\xi \qquad (1.6.17)$$

Мында $C_1$– эркибизче алынган турактуу чоңдук. Демек бардык чыгарылыш (0,0) чекити аркылуу өтөт. $\xi=0$ чекитиндеги жанымасын эсептейбиз. Аныктама боюнча,

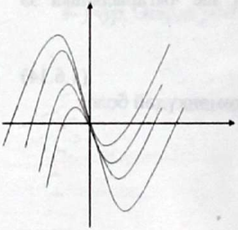
$$\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=\frac{\frac{1}{\lambda}\Delta\xi\ln|\Delta\xi|+C_1\Delta\xi}{\Delta\xi}=\frac{1}{\lambda}\ln\Delta\xi+C_1$$

Мындан

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=\pm\infty$$

оң жактагы белги λ санынын белгисине көз каранды болот. Бул учурда да өзгөчө чекит түйүн болот.

Бардык ийри сызыктар үчүн о$\eta$ огу жаныма болот. Ал түйүндүн сүрөттөлүшү 5-чийме.



*5-чийме*

Эгерде (1.6.4) системасынын коэффициенттери нөлгө барабар болсо, анда

$$a = d = 0; \qquad b = c = \lambda.$$

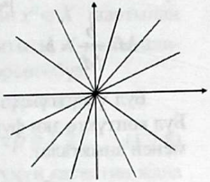
(1.6.1) теңдемеси төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x}$$

Акыркы теңдеменин чыгарылышы

$$y = C \cdot x$$

Демек (0,0) чекити аркылуу бардык чыгарылыштар өтөт. Өзгөчө чекит түйүн болот. Сүрөттөлүшү 6-чийме.



*6-чийме*

## §1.7. Дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселелесинин чыгарылышынын жашашын кысып чагылтуу аркылуу далилдөө

Бизге Коши маселеси берилсин

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.7.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.7.2}$$

§1.4 далилдеген боюнча (1.7.1), (1.7.2) Коши маселеси төмөнкү интегралдык теңдемеге тең күчтө

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y))ds \tag{1.7.3}$$

$f(x, y)$ функциясы § 1.4төгү шарттарды аткарсын дейли.
(1.7.3) теңдемесинин оң жагын оператор деп алсак:

$$A(y(x)) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, |x - x_0| \le h \tag{1.7.4}$$

Эгерде $y(x)$ функциясы $x \in [x_0 - h, \quad x_0 + h]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо жана графиги $R$ тик бурчтугунун ичинде жатса, б.а. $y(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, анда (1.7.4) оператору бул мейкиндикти өзүнө чагылдырат.

Чындыгында,

$$\left|A(y(x))-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(s,y(s))\right|ds\right|\le M\left|x-x_0\right|\le$$

$$\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

Бул үзгүлтүксүз функциялардын көптүгүн $C_h^{R}$ деп белгилейбиз. Бул көптүктө эки функциянын ортосундагы аралык төмөнкү формула менен аныкталат.

$$\rho_{C_h^R}(y_1(x),y_2(x))=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|. \qquad (1.7.5)$$

Демек, (1.7.4) формуласы менен аныктаган $A$ чагылтуусу $C_h^{R}$ метрикалык мейкиндигин өзүн өзүнө чагылдырат. Бул метрикалык мейкиндик (1.7.5) формуласы менен аныкталган аралык менен толук болот.

Биз азыр жалпы абстрактуу метрикалык мейкиндикте кысып чагылтуу түшүнүгүн кийребиз. $X$ метрикалык мейкиндиги берилсин. Бул мейкиндикте аралыкты

$$\rho(x,y)\ \forall(x,y)\in X$$

$X$– аркылуу толук метрикалык мейкиндикти белгилейли, б.а. каалаган фундаменталдык удаалаштык жыйналуучу болсун. $A$ чагылтуусу бул мейкиндикти өзүн өзүнө чагылтсын дейли, б.а. эгерде $x\in X$ болсо, анда

$$A(x)\in X.$$

Эгерде каалаган $x_1$ жана $x_2$ элементтери үчүн

$$\rho(Ax_1,Ax_2)\le\alpha\rho(x_1,x_2),\qquad \alpha<1 \qquad (1.7.6)$$

шартын аткарса, анда $A$ кысып чагылтуу деп аталат.

Төмөнкүдөй теорема орун алат.

*Теорема.* Эгерде $A$ чагылтуусу $X$ толук метрикалык мейкиндигин өзүн өзүнө чагылдырсын жана ал кысып чагылтуу болсун, б.а. (1.7.6) шарты аткарылсын, анда $x=Ax$ (1.7.7) оператордук теңдемеси $X$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ болот, б.а. $x^*$ элементи табылып, ал $A$ чагылтуусунун кыймылсыз чекити болот.

*Далилдөө.* X мейкиндигинен $x^0$ чекитин алабыз жана төмөнкү формула боюнча удаалаштык түзөбүз:

$$x_{k+1} = Ax_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (1.7.7_k)$$

*A X* мейкиндигин өзүн өзүнө чагылткандыктан $x^0 \in X$ шартынан $x_{k+1} \in X, x = 0,1,2\ldots,$ келип чыгат. $(x_k)$ удаалаштыгы $X$ мейкиндигинде фундаменталдык удаалаштык экендигин көрсөтөбүз.

Ал үчүн каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн $N(\varepsilon)$ номер жашап

$$\rho(x_{n\ p}, x_n) < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon), \forall p = 1,2\ldots \qquad (1.7.8)$$

аткарыла турганын далилдейбиз. Кысып чагылтуунун касиетин жана $(1.7.7_k)$ формуласын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \le \alpha\rho(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \le$$
$$\le \alpha^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \ldots \le \alpha^n \rho(x_1, x_0) \qquad (1.7.9)$$

Метриканын касиетин колдонуп, төмөнкүдөй барабарсыздыкка келебиз:

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \le \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le \alpha^{n+p-1} + \ldots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) = \alpha^n(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\rho(x_1, x_0). \qquad (1.7.10)$$

$\alpha < 1$ экендигин эске алып, геометриялык прогрессиянын суммасынын формуласын колдонуп, (1.7.10) барабарсыздыгынан төмөнкүнү алабыз:

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \le \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) \qquad (1.7.11)$$

Бул барабарсыздыктын оң жагы каалаган p үчүн $n \to \infty$ нөлгө умтулат. Демек (1.7.8) барабарсыздыгы аткарыла турган $N(\varepsilon)$ номери табылат.

$(x_k)$– удаалаштыгы $X$ метрикалык мейкиндигинде фундаменталдык удаалаштык. $X$ толук мейкиндик болгондуктан $(x_k)$ удаалаштыгы жыйналуучу болот. Ошондуктан $x \in X$ элементи табылып, $x_k \to x, k \to \infty$.

$(1.7.7_k)$ барабардыгынын эки жагынын $k \to \infty$ пределге өтүп жана *A* чагылтуунун үзгүлтүксүздүгүн эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x=Ax,$$

б.а. $x$ (1.7.7) теңдемесинин чыгарылышы болот. Бул чыгарылыш жалгыз экендигин карама-каршы ыкмасы менен далилдейбиз. Дагы бир $y \neq x$ эмес чыгарылышы бар дейли:

$$y = Ay,$$

Булардан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*) \leq \alpha\rho(x^*, y^*)$$

мындан, $\rho(x^*, y^*)(1-\alpha) \leq 0$, $1-\alpha > 0$ болгондуктан, $\rho(x^*, y^*) = 0$ болот. Анда $\rho$ метрикасынын касиети боюнча $x^*=y^*$ болот. Демек (1.7.7) теңдемесинин чыгарылышы жалгыз.

Бул теореманы (1.7.3) теңдемесине колдонобуз. (1.7.3)түн оң жагы $C_n'^R$ мейкиндигин өзүн өзүнө чагылдырат. Азыр биз кандай шарт аткарылганда, ал кысып чагылтуу болоорун көрсөтөбүз. Каалагандай $y_1(x)\ y_2(x) \in C_h'^R$ элементтер үчүн төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\rho_{C_n^R}(Ay_1(x), Ay_2(x)) = \max_{x\in[x_0-h, x_0+h]} \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, y_1(s) - f(s, y_2(s)))ds \right| \leq$$

$$\max_x \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(s, y_1(s) - f(s, y_2(s) \right| ds \right| \leq \max_x \left| \int_{x_0}^{x} N \left| y_1(s) - y_2(s) \right| ds \right| \leq \quad (1.7.12)$$

$$\leq N \cdot h \max_{x\in[x_0-h, x_0+h]} \left| y_1(s) - y_2(s) \right| = N \cdot h \cdot \rho_{C_n^R}(y_1 \cdot y_2)$$

Демек, эгерде $\alpha \equiv N \cdot h < 1$ болсо, (1.7.4) формуласы аркылуу аныкталган $A$ чагылтуусу кысып чагылтуу болот.

Ошондуктан, жогорку теореманы колдонуп, (1.7.3) интегралдык теңдемесинин жалгыз чыгарылышы жашай тургандыгы далилденет.

*Теорема:* Эгерде $f(x, y)$ функциясы $R$ тик бурчтугунда үзгүлтүксүз болсо у аргументи боюнча Липщицтин шартын аткарса жана болсо, анда $[x_0 - h, x_0 + h]$ сегментинде (1.7.3) интегралдык теңдемесинин же (1.7.1), (1.7.2) Коши маселесинин жалгыз чыгарылышы жашайт.

# II ГЛАВА

## ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

### §2.1. Коши маселеси үчүн жашоо жана жалгыздык теоремасы жөнүндө

Туундусуна карата чечилбеген теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \qquad (2.1.1)$$

Мында $F\left(x, y, y'\right)$ белгилүү $G \subset R^3$ областында аныкталган функция. Биз $G$ областындагы $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$ чекитин карайбыз. Ушул чекиттин аймагында

$$\left.\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ y'=y'_0}} \neq 0$$

шарты аткарылсын дейли.

Анда айкын эмес функциянын теоремасынын негизинде (2.1.1) туюнтмасын $y'$ке карата чечүүгө болот.

$$y' = f(x, y(x)) \qquad (2.1.2)$$

(2.1.2) теңдемесине 1.4. параграфта далилденген теореманы колдонуп, эгерде $f(x, y)$ функциясы $y$ аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырса, (2.1.2) теңдемесинин $y(x_0) = y_0$ шартын канааттандырган чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат. Биз ушуну текшеребиз

$$O=\left|F(x,y_2,y_2')-F(x,y_1,y_1')\ \right|=\left|F(x,y_2,y_2')-F(x,y_1,y_2')+F(x,y_1,y_2')-F(x,y_1,y_1')\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1+\theta(y_2-y_1),y_2')(y_2-y_1)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2+\theta(y_2-y_1))(y_2'-y_1')\right|$$

Демек,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(\cdot)(y_2^1-y_1')=-\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot)(y_2-y_1)$$

Эгерде $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right|\geq\alpha$, ал эми $\left|\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot)\right|\leq M$ болсо, анда

$$\alpha\left|y_2'-y_1'\right|\leq\left|\frac{\partial F}{\partial y'}(\cdot)\right|\left|\left(y_2'-y_1'\right)\right|\leq M\left|y_2-y_1\right| \qquad (2.1.3)$$

(2.1.3) барабарсыздыгынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_2'-y_1'\right|\leq\frac{M}{\alpha}\left|y_2-y_1\right|$$

же

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|\leq N\left|y_2-y_1\right|$$

$f(x,y)$ функциясы Липшицтин шартын канааттандырары далилденди.

Демек, $F\left(x,y,y'\right)$ функциясы $y,y'$ аргументтери боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуга ээ жана $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right|\geq\alpha$ болсо, $F(x,y,y')=0$ теңдемесин $y'$ке карата чыгарууга болот жана пайда болгон функция $y$ аргументи боюнча Липшицтин шартын канааттандырат.

Бул шарттар канааттандырылса, (2.1.1) тещдемесине §1.4. далилденген теореманы колдонуп, $(x_0,y_0)$ чекити аркылуу өткөн чыгарылышы жашаары жана жалгыз боло тургандыгы келип чыгат.

## § 2.2. Туундуга карата чыгарылбаган теңдемелердин түрлөрү жана аларды интегралдоонун ыкмалары.

1. Изделүүчү функцияны кармабаган теңдеме. Ал төмөнкү түрдө жазылат:

$$F\left(x,y'(x)\right)=0 \qquad (2.2.1)$$

Эгерде (2.2.1) теңдемесинин сол жагы $y'$ аргументи боюнча айкын эмес функциянын теоремасынын шартын канааттандырса, анда (2.2.1)ди $y$ке карата чыгарууга болот.

$$y' = f_1(x), \quad y' f_2(x) \qquad (2.2.2)$$

Бул теңдемелерди интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(s)ds + c_1 \qquad y(x) = \int_{x_0}^{x} f_2(s)ds + c_1$$

Бирок көпчүлүк учурларда (2.2.1) теңдемесин $y$ке карата чыгарууга болбой калат. (2.2.1) теңдемеси $x$ке карата чыгарылсын дейли:

$$x \quad (p) \text{ мында } y' = p \qquad (2.2.3)$$

$p$ны параметр катары карайбыз. Эми $y$ти дагы $p$ параметри боюнча туюнталы. (2.2.3)тү төмөндөгүчө жазалы:

$$dy = pdx \qquad (2.2.4)$$

(2.2.3)төн $dx = \phi'(p)dp$ болгондуктан, муну (2.2.4) туюнтмасына коюп, $dy = p\phi'(p)dp$ алабыз. Мындан төмөнкүг ээ болобуз:

$$y(p) = \int_{p_0}^{p} s\phi'(s)ds + c \qquad (2.2.5)$$

(2.2.3), (2.2.5), (2.2.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формасын берет. Эгерде (2.2.3), (2.2.5) теңдемесинен $p$ны жоюп таштоого мүмкүн болсо, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\hat{O}(x, y, c) = 0$$

2. Көз карандысыз өзгөрмөнү кармабаган теңдеме. Бул теңдеме төмөнкүдөй жазылат:

$$F(y, y') = 0 \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6) теңдемесин $y'$-ке карата чыгарууга мүмкүн болсун дейли, б.а.

$$y' = f_1(y), \quad y' = f_2(y) \qquad (2.2.7)$$

Бул өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелер, (2.2.7) ар бирин интегралдасак, анда

$$\int \frac{dy}{f_k(x)} = x + c, \quad k = 1, 2, \qquad (2.2.8)$$

Эгерде (2.2.6) теңдемеси $y$ке карата чечиле турган болсо, анда $y=\phi(y')$ке ээ болобуз. Бул теңдемени параметрди киргизүү методу менен интегралдайбыз. $y'=p$ деп алалы. Анда $y=\phi(p)$

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}d\phi(p)=\frac{1}{p}\phi'(p)dp$$

же болбосо

$$x=\int\frac{\phi'(p)}{p}dp+c$$

Акыркы функция $y=\phi(p)$ менен бирге $y=\phi(y')$ теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формасын берет.

(2.2.1) теңдемеси $t$ параметри аркылуу төмөнкү түрдө жазылып калышы мүмкүн $x=\phi(t)$, $\quad p=\psi(t)$.
Мындан

$$p=\frac{dy}{dx}=\psi(t),\ dy=\psi(t)dx=\psi(t)\phi'(t)dt$$

Акыркы туюнтманын эки жагын интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(t)=\int\psi(t)\phi'(t)dt+c \tag{2.2.9}$$

Акыркы теңдеме $x=\phi(t)$ теңдемеси менен (2.2.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик түрдөгү жазылышы.

## § 2.3. Параметр киргизүүнүн жалпы методу. Лагранждын жана Клеронун теңдемелери.

Бизге туундусуна карата чечилбеген төмөнкүдөй

$$F(x,y,p)=0 \tag{2.3.1}$$

теңдемеси берилсин. Эгерде биз $x,y,p$ны мейкиндиктеги чекиттин декарттык координаты катары карасак, анда (2.3.1) кандайдыр беттин теңдемеси болуп эсептелет. Бизге ушул беттин параметрдик формадагы теңдемеси белгилүү болсун дейли:

$$x=\phi(u,v),\qquad y=\psi(u,v),\qquad p=\chi(u,v) \tag{2.3.2}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \quad же \quad dy = pdx$$

экендигин эске алып,

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv,$$

Акыркы туюнтмадан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u,v) \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \right]$$

Бул $u, v$ өзгөрүлмө чоңдуктарына карата биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме. Мында $v$ны изделүүчү функция катары кабыл алып, акыркы теңдемени төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u,v) \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u,v) \frac{\partial \phi}{\partial v}}$$

Демек биз туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеге ээ болдук. Эгерде биз анын жалпы чыгарылышы болсун десек,

$$v = w(u,c)$$

анда (2.3.2)нин биринчи эки барабардыгы

$$x = \phi\left[u, w(u,c)\right], \qquad y = \psi\left[u, w(u,c)\right]$$

түрүнө келет.

Бул (2.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формасы. Эгерде (2.3.1) теңдемеси $x$ке же $y$ке карата чечилсе, анда бул учурда (2.3.2) өзгөртүп түзүүсү колдонулат, параметр катары $y,p$ны же $x,p$ны кабыл алабыз. Маселен, $y = f(x,p)$ теңдемесин карайлы. $dy = pdx$ -ти эске алып жана $dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$ коюп,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = pdx \quad же \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = p \qquad (2.3.4)$$

ээ болобуз. Биз биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени алдык.

$p=\phi(x,c)$ бул теңдеменин жалпы чыгарылышы болсун дейли, анда $y=f(x,\phi(x,c))$ (2.3.3) теңдемесинин жалпы чыгарылышы. Ушундай эле жол менен $x=f(y,p)$ теңдемесин чыгарууга болот.

Биз жогоруда туундусуна карата чечилбеген теңдемелерди параметр кийрүү методу аркылуу туундусуна карата чечилген теңдемелерге келтирдик. Алардын чыгарылышы интеграл түрүндө туюнтулуучу теңдемелерди карайлы.

*Лагранждын теңдемеси.* Эгерде (2.3.1) теңдемеси $x$ке жана $y$ке карата сызыктуу болсо, анда ал Лагранждын теңдемеси деп аталат жана төмөнкүдөй жазылат:

$$A(p)x+B(p)y=C(p) \qquad \text{же} \qquad y=\phi(p)x+\psi(p) \quad (2.3.5)$$

Мында

$$\phi(p)=-\frac{A(p)}{B(p)}, \qquad \psi(p)=\frac{C(p)}{B(p)},\ B(p)\neq 0:$$

Акыркы теңдеменин эки жагын $x$ боюнча туундулайбыз жана $p=\frac{dy}{dx}$ эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(p)\frac{dp}{dx}x+\phi(p)+\psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

же

$$p=\left(\phi'(p)x+\psi'(p)\right)\frac{dp}{dx}+\phi(p)$$

Мындан, эгерде $x$ти белгисиз функция $p$дан көз каранды чоңдук катары кабыл алсак, анда төмөнкүдөй теңдемеге ээ болобуз:

$$(p-\phi(p))\frac{dx}{dp}=x\phi'(p)+\psi'(p)$$

Эгерде $\phi(p)\neq p$ болсо, эки жагын $p-\phi(p)$ туюнтмасына бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)}x+\frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)} \qquad (2.3.6)$$

(2.3.6) *x(p)* функциясына карата биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес теңдеме. Анын чыгарылышы 3-параграф боюнча төмөнкү түрдө болот:

$$x(p)=ce^{\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\phi'(s)}{s-\phi(s)}d\tau}+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\psi'(s)}{s-\phi(s)}e^{\int\limits_{s}^{p}\frac{\phi'(\tau)}{\tau-\phi(\tau)}d\tau}ds=cw(p)+\chi(p) \quad (2.3.7)$$

Бул табылган маанини (2.3.5) теңдемесине коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$y(p)=\phi(p)\left[cw(p)+\chi(p)\right]+\psi(p) \quad (2.3.8)$$

(2.3.8) жана (2.3.7) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формада жазылышы. Эгерде бул эки теңдемеден $p$ параметрин чыгарсак, анда

$$\hat{O}(x,y,c)=0$$

(2.3.5) теңдемесинин жалпы интегралы.

*Клеронун теңдемеси.* Эгерде (2.3.5) теңдемесинде $\phi(p)=p$ болсо, анда теңдеме Клеро теңдемеси деп аталат жана төмөнкү түрдө жазылат:

$$y=px+\psi(p) \quad (2.3.9)$$

(2.3.9) теңдемесинин эки жагын $x$ аргументи боюнча туундулап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}x+p+\psi'(p)\frac{dp}{dx} \quad \text{же} \quad p=\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))+p$$

Мындан

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))=0$$

Эки учурду карайбыз а) $\frac{dp}{dx}=0$, б) $x+\psi'(p)\neq 0$. Мындан $p=c$ анда $p=c$ анда $y=cx+\psi(c)$

Клеронун теңдемесинин жалпы чыгарылышы

$$\text{б) } p'\neq 0, x+\psi(p)=0, \quad x=-\psi'(p) \quad (2.3.10)$$

Мындан $x=-\psi'(p)$.

Бул маанини (2.3.9) теңдемесине коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y=-p\psi'(p)+\psi(p) \quad (2.3.11)$$

Эгерде $p$ параметрдин ордуна $t$ параметрин кийрисек, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x=-\psi'(t), \qquad y=-t\psi'(t)+\psi(t) \quad (2.3.12)$$

(2.3.12), (2.3.9) теңдемесин канааттандыра тургандыгын далилдейбиз.

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{(-\psi'(t)-t\psi''(t)+\psi(t)dt)}{-\psi''(t)dt}=t,$$

$$-t\psi'(t)+\psi(t)\equiv -t\psi'(t)+\psi(t).$$

Бул чыгарылыш жалпы чыгарылыштан *c* туруктуу чоңдугунун эч бир маанисинде алынбайт. (2.3.10) теңдемесин *p*га карата чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$p=w(x) \tag{2.3.13}$$

(2.3.13)тү (2.3.9) теңдемесине коюп, жекече чыгарылышты алабыз:

$$y=xw(x)+\psi\left[w(x)\right] \tag{2.3.14}$$

Бул чыгарылыш (2.3.9) жалпы чыгарылышынан *c* параметринин эч бир маанисинде алынбайт. (2.3.9) чыгарылышы *x*ке карата сызыктуу функция. (2.3.14) чыгарылышы да сызыктуу функция болсун дейли, б.а.

$$xw(x)+\psi\left[w(x)\right]=ax+b$$

Мында *a,b* – туруктуулар. Алдыдагы барабардыкты дифференциалдасак, анда

$$w(x)+xw'(x)+\psi'\left[w(x)w'(x)\right]=a$$

$w(x)$ функциясынын аныкталышын эске алсак, $\psi'\left[w(x)\right]=-x$. Ушунун негизинде

$$w(x)+xw'(x)-xw'(x)=a$$

же болбосо

$$w(x)=a$$

Бул *w(x)* функциясынын аныкталышына туура келбейт. (2.3.14) түн чыгарылышынын геометриялык маанисин көрсөтөлү. (2.3.14) чыгарылышы $y=cx+\psi(c), x+\psi'(c)=0$ теңдемесинен *c* параметрин чыгаруудан алынат. Алдыдагы теңдемелерден экинчиси биринчинин *c* параметри боюнча туундусу. Бул процесс $y=cx+\psi(c)$ түз сызыктардын ийүүчүсүн табуу болуп эсептелет. Демек, (2.3.14) чыгарылышы өзгөчө чыгарылыш жана ал (2.3.9) түз сызыктарынын ийүүчүсү.

Мисалдар.

1. $0=2y'+y'^2-x$ теңдемесин интегралдоо талап кылынсын. Бул теңдеме көз карандысыз өзгөрмөгө карата чечилет.

$x = 2y' + y'^2$, $y' = t$ десек, анда $x = 2t + t^2$. $y$ти $t$ параметри аркылуу туюнталы. Ал үчүн $x=2t+t^2$ дифференциалдап жана $dy = tdx$ экенин эске алсак, төмөндөгү барабардыкка ээ болобуз:

$$dy = t(2dt + 2tdt) = 2t(1+t)dt$$

Акыркы барабардыкты интегралдасак,

$$y = \int_x 2t(1+t)dt + c = t^2 + \frac{2}{3}t^3 + c$$

Жогорудагы $x$тин мааниси менен биргелештирсек, берилген теңдеменин параметрдик формадагы жалпы чыгарылышын алабыз:

$$\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t^2 + \dfrac{2}{3}t^3 + c \end{cases}$$

2. Мисал келтирели, $x = y' + \sin y'$. Бул теңдеме $y$'ке карата чыгарылбайт, бирок $x$ке карата чыгарылган. $y' = p$ деп алып, $x = p + \sin p$ экенин көрөбүз.

Эми жогорудагыдай эле

$$dy = pdx = p(dp + \cos pdp) = p(1 + \cos p)dp$$

Муну интегралдасак,

$$y = \frac{1}{2}p^2 + \int p\cos pdp + c = \frac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p + c$$

$x$ жана $y$ти биргелештирсек,

$$\begin{cases} x = p + \sin p \\ y = \dfrac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p + c \end{cases}$$

берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Көз карандысыз өзгөрмөнү кармабаган теңдемеге мисал келтирели:

3. $y = y'^2 + 2y'^3$ теңдемесин интегралдоо керек. Бул $y$'ке карата чыгарылган теңдеме. $y' = t$ десек, анда $y = t^2 + 2t^3$. $dy = tdx$ барабардыгынан $dx = \frac{1}{t}dy$; $dy = \left(2t + 6t^2\right)dt$ болгондуктан,

$$dx = \frac{2}{t}(1+3t)tdt = 2(1+3t)dt$$

Мындан $x = 2t + 3t^2 + c$. Акыркы барабардыкты $y$ менен биргелештирсек, анда

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + c \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

Берилген теңдеменин параметрдик формадагы жалпы чыгарылышы.

4. $y = e^{y'} y'^2$ теңдемесин интегралдайлы. $y'=t$ десек, $y = ye^t t^2$. Мындан $dy = (e^t t^2 + 2te^t)dt$, $y' = t$ барабардыгынан $dx = \frac{1}{t}dy$; $dy$ -тин туюнтмасын пайдаланып,

$$dx = \frac{1}{t}(e^t t^2 + 2te^t)dt = e^t(t+2)dt$$

экендигин көрөбүз. Акыркы барабардыктын эки жагын интегралдасак, анда

$$x = \int e^t(t+2)dt + c = (t+2)e^t + e^t + c$$

$y$ менен биргелештирсек,

$$\begin{cases} x = (t+3)e^t + c \\ y = e^t t^2 \end{cases}$$

жалпы чыгарылышы алынат.

Төмөндөгү теңдемелер кайсы типке кирерин аныктагыла жана жалпы чыгарылыштарын тапкыла.

1. $y'^2 + 2y' - \frac{y}{x} = 0,$ 2. $xy'^3 = 1 + y'$;

3. $x = y'^3 + 1,$ 4. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$;

5. $y = \frac{1}{2}y'^2 + \ln y',$ 6. $xy'^2 - 2yy' + x = 0;$

7. $x(y'^2 - 1) = 2y,$ 8. $y'^2 - y^2 = 0;$

9. $xy'^2 = y$

## § 2.4. Өзгөчө чыгарылыштар

Биз Клеро теңдемесин изилдегенде өзгөчө чыгарылыш менен кездештик. Туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги теңдемени карайбыз.

$$y' = f(x, y(x)) \tag{2.4.1}$$

Кошинин теоремасы боюнча, эгерде $f(x, y)$ функциясы үзгүлтүксүз болсо жана $y$ аргументи боюнча чектелген жекече туундуга ээ болсо, анда $(x_0, y_0)$ чекити аркылуу (2.4.1) теңдемесинин бир гана чыгарылышы өтөт.

*Аныктама.* Дифференциалдык теңдеменин өзгөчө чыгарылышы деп, ушул чыгарылыштын ар бир чекитинде теңдеменин чыгарылышынын жалгыздыгы бузулган чыгарылышты айтабыз, б.а. өзгөчө чыгарылыштын каалаган чекитинен эң жок дегенде теңдеменин эки чыгарылышы өтөт.

Кошинин теоремасы өзгөчө чыгарылыштын жашабасынын жетишээрлик шартын берет. Демек, өзгөчө чыгарылыш Липшицтин шарты аткарылбаган чекиттеринде жашайт. Липшицтин шарты $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ чексизге барабар болгон же жашабаган чекиттерде аткарылбайт. Мисал үчүн

$$y' = y^{2/3} \tag{2.4.2}$$

Бул теңдеменин оң жагы $y$тин бардык маанилеринде үзгүлтүксүз жана аныкталган. Бирок $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^{2/3}\right) = \dfrac{2}{3} y^{-1/3}$, $y = 0$ маанисинде чектелбейт. (2.4.2) теңдемесин интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int y^{-2/3} dy = \int dx + c_1 \qquad 3y^{1/3} = x + c$$

Мындан $27y = (x+c)^3$. Бул кубдук парабола (2.4.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы. Ошондой эле $y$=0 дагы (2.4.2) теңдемесинин чыгарылышы экендигин көрүүгө болот. Демек, $Ox$ огу аркылуу эки чыгарылыш өтөт $y$=0 жана $27y = (x+c)^3$. Ошондуктан $y$=0 (2.4.2) теңдемесинин өзгөчө чыгарылышы деп аталат. Демек, дифференциалдык теңдеменин өзгөчө чыгарылышын табуу үчүн $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty$ болгон же жашабаган чекиттердин ордун табыш керек, эгерде алар бир же бир нече ийри сызык болсо, булар берилген теңдеменин чыгарылышы экендигин текшериш керек жана ошол чыгарылыштын ар бир чекитинде теңдеменин жалгыздыгы бузула тургандыгын көрсөтүш керек. Эгер ушул эки шарт орундалса, анда бул ийри сызык берилген теңдеменин өзгөчө чыгарылышы болот.

Бизге туундусуна карата чечилбеген дифференциалдык теңдеме берилсин.

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.4.3}$$

Липшицтин шарты (2.4.3) теңдемеси үчүн $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$ болгон чекиттерде орундалбайт, себеби айкын эмес функциянын туундусун табуу формуласы боюнча

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y'} \tag{2.4.4}$$

(2.4.4)тү жана $\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ экендигин эске алып, (2.4.3.)тү $y'$ карата чечилгенден кийин $y' = f(x, y)$ болгондо, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ болгон чекиттерде $f(x, y)$ функциясы Липшицтин шартын канааттандырбайт. Демек,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \tag{2.4.5}$$

болгон чекиттерде Липшицтин шарты аткарылбайт. (2.4.3) жана (2.4.5) теңдемесинен $y'$ти чыгарып, төмөнкүдөй теңдемеге ээ болобуз:

$$\Phi(x,y)=0 \tag{2.4.6}$$

Эгерде (2.4.3) түрүндөгү дифференциалдык теңдеме берилсе, (2.4.5) теңдемесин түзөбүз, (2.4.3) жана (2.4.5) теңдемелеринен $y'$ ти чыгарып, (2.4.6) түрүндөгү теңдемеге ээ болобуз. Эгерде ушул теңдемеден аныкталган функция $y = \phi(x)$ (2.4.3) теңдемесинин чыгарылышы болсо, анда ал өзгөчө чыгарылыш болот.

# III ГЛАВА

## ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

### § 3.1. Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы

$n$ – тартиптеги дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)} = 0 \qquad (3.1.1)$$

Мында $y(x)$ – белгисиз функция, $x$ – көз каранды эмес чоңдук, $F$ – белгилүү, $n+2$ аргументтүү үзгүлтүксүз функция.

Эгерде $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n)}$ чекитинин аймагында төмөнкүдөй шарттар аткарылса

$$F(x, y, y' ... y^{(n)}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x, y, y' ... y^{(n)}) \neq 0$$

анда айкын эмес функциянын теоремасынын негизинде (3.1.1) теңдемесин

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x) \qquad (3.1.2)$$

түрүндө жазууга болот. Коши маселесинин чыгарылышынын жашоосун жана (3.1.2) теңдемесинин төмөнкү баштапкы шартты канааттандырган чыгарылышынын жашоосун жана жалгыздыгын далилдейбиз:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3.1.3)$$

Мында $x_0, y_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}$ берилген сандар (3.1.2) жана (3.1.3) маселесинин жалгыздыгын далилдеш үчүн (3.1.2) теңдемесин $n$-дифференциалдык теңдеме менен алмаштырабыз. Ал үчүн $y$ функциясы менен бирге $n-1$ белгисиз функцияларды төмөнкүдөй формула менен кийиребиз:

$$y' = y_1, y'_1 = y_2, \; y'_{n-2} = y_{n-1} \tag{3.1.4}$$

(3.1.4) туюнтмасынан төмөнкүнү алабыз:

$$y_k = y^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Анда

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n+1}}\right) = y^{(n)}(x)$$

Ушуну эске алып, (3.1.2) теңдемесин төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, ..., y_{n-1}) \tag{3.1.5}$$

(3.1.4), (3.1.5) $y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ белгисиз функцияларга карата дифференциалдык теңдемелердин системасы болуп эсептелет. Бул теңдемелерде (3.1.5) гана $x, y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ ге жалпы көз каранды. Ал эми (3.1.4) бул чоңдуктардан жекече көз каранды. Биз (3.1.4), (3.1.5)тин жалпы учурун карайбыз, симметриялуу болуш үчүн белгисиз функцияларды $y_1, y_2, ..., y_n$ менен белгилеп, төмөнкүдөй системаны карайбыз:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ &----------- \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

(3.1.3)түн жана (3.1.4) белгилөөнүн негизинде бул система төмөнкүдөй баштапкы шартты канааттандырат:

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{*}$$

Мында $f_1(.), ..., f_n(.)$, $x, y_1, ..., y_n$ аргументтери боюнча $G \subset R^{n+1}$ областында аныкталган, үзгүлтүксүз функциялар.

G областы төмөнкүдөй $n+1$ өлчөмдүү паралеллепипед болсун дейли:

$$\Pi=\{|x-x_0|\le a, \quad |y_k-y_k^0|\le b_k, \qquad k=1,2,..,n\}$$

Төмөнкүдөй шарттар атакрылсын:

а) $f_i$ функциялары ушул паралеллепипедде үзгүлтүксүз болгондуктан, Вейерштрасстын теоремасы боюнча бул функциялар чектелген болот, б.а.

$$|f_i(x,y_1,...,y_n)|\le M, \quad (x,y_1,...,y_n)\in\Pi, i=1,2,...,n \qquad (3.1.7)$$

б) $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$ функциялары $y_1,y_2,...,y_n$ аргументтери боюнча Липшицтин шартын канааттандырсын:

$$\left|f_i(x,y_1^{(2)},...,y_n^{(2)})-f_i(x,y_1^{(1)},...,y_n^{(1)})\right|\le N\left[\left|y_1^{(2)}-y_1^{(1)}\right|+\left|y_2^{(2)}-y_2^{(1)}\right|+...+\left|y_n^{(2)}-y_n^{(1)}\right|\right] \qquad (3.1.8)$$

Эгерде $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$ функциялары $y_1,y_2,...,y_n$ аргументтери боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуга ээ болсо, анда $y_1,y_2,...,y_n$ аргументтери боюнча Липшицтин шарты аткарылат. Эгерде $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ болсо, анда төмөнкүдөй теорема орун алат.

*Теорема 3.1.* $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$ функциялары үчүн а) жана б) шарттары аткарылсын дейли, анда $|x-x_0|\le h$ сегментинде аныкталган $(\phi_1(x),\phi_2(x),...,\phi_n(x))$ үзгүлтүксүз функциялары жашайт жана алар (3.1.6) системасын жана (*) баштапкы шарттарды канааттандырган функциялары жалгыз болот.

*Далилдөө.* (3.1.6) дифференциалдык теңдемелер системасы (*) баштапкы шарты менен төмөнкүдөй интегралдык теңдемелердин системасына тең күчтө:

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x}f_i(s,y_1(s),...,y_n(s))ds; i=1,2,...,n. \qquad (3.1.9)$$

(3.1.9) интегралдык тещдемесинин чыгарылышынын жашашын удаалаш жакындаштырып эсептөө методу аркылуу далилдейбиз.

Удаалаш жакындаштырууну төмөнкү формула аркылуу түзөбүз:

$$y_i^{(k)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, y_1^{(k-1)}(s), ..., y_n^{(k-1)}(s))ds \quad i = 1, 2, ..., \pi, \qquad k = 1, 2....$$

(3.1.10)

(3.1.10) формуласы боюнча улам кийинкиси мурункусу аркылуу аныкталат. Нөлүнчү функцияны П областында жаткан каалагандай үзгүлтүксүз функцияны алсак болот. Биздин учурда

$$y_i^0(x) = y_i^0, \qquad i = 1, 2, ..n \qquad (3.1.10_0)$$

П областынын аныктамасы боюнча $y_i^0(x)$ ошол обласа жатат. (3.1.10) формуласында $k$=1 десек,

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)ds \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (3.1.10_1)$$

Ушул $y_i^{(1)}(x)$ тин П областында жата тургандыгын көрсөтөбүз. (3.1.10) дон төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(s, y_1^0, ..., y_n^0)ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(s, y_1^0, ..., y_n^0)\right|ds\right| \le$$

$$\le M\left|x - x_0\right| \le M \cdot h$$

Теореманын шарты боюнча $h \le \dfrac{b}{M}$, ошондуктан акыркы барабарсыздыктан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{0)}\right| \le b, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (3.1.11_1)$$

Демек, $y_i^{(1)}(x) \in П$ (3.1.10) формуласынан $y_i^{(1)}(x)$ функциялары үзгүлтүксүз экендигин көрүүгө болот. Анткени $\overset{0}{y_i}$ турактуу функциялары үзгүлтүксүз, ал эми экинчи суммадагы интегралдын алдындагы функциялар үзгүлтүксүз, булардын интегралы жогорку предели өзгөрмө болгондо үзгүлтүксүз болот. Демек, $y_i(x) \in C[0, h] - [0, h]$ сегментинде аныкталган үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги.

Ушундай эле жол менен $k$=2 десек, $(3.1.10_k)$ формуласынын төмөнкүнү алабыз:

$$y_i^{(2)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, y_i^{(1)}, ..., y_n^{(1)}(s))ds, \qquad i = 1, 2, ..., n \quad (3.1.10_2)$$

$y_i^{(2)}(x)$ функциялары $|x-x_0|\le h$ болгондо П областында жата тургандыгын жана $y_i^2(x)\in C[0,h]$ экендигин көрсөтөбүз. Жогоруда көрсөткөн боюнча $y_i^{(1)}(x)$ тин графиги $|x-x_0|\le h$ болгондо, П областынан чыкпайт жана $y_i^{(1)}(x)\in C[0,h]$ Демек, $f_i(s,y_1^{(1)}(s),...,y_1^{(1)}(s))$ областында үзгүлтүксүз болгондуктан, Вейерштрасстын теоремасы боюнча чектелген болот, б.а.

$$\left|f_i(s,y_1^{(1)}(s),...,y_n^{0}(s))\right|\le M,\quad i=1,2,...,n.$$

(3.1.10$_2$) формуласынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(2)}(x)-y_i^0\right|\le b, i=1,2,... \qquad (3.1.11_2)$$

Бул болсо $y_i^{(2)}(x)$ функцияларынын графиги $|x-x_0|\le h$ болгондо П областынан чыкпайт дегенди билдирет. Жогорудагыдай эле $y_i^{(3)}(x)\in C[0,h]$ экендигин далилдөөгө болот. Ушул жол менен каалаган j саны үчүн $y_i^{(j)}(x)$ функциясын (3.1.10$_k$) формуласы аркылуу аныктоого болот жана математикалык индукция методу боюнча $y_i^{(j)}(x)$ функцияларынын графиги $|x-x_0|\le h$ болгондо, П областынан чыкпай тургандыгын, ошондой эле $y_i^{(j)}(x)\in C[0;h]$ мейкиндигинде жата тургандыгын далилдөөгө болот. (3.1.11$_1$), (3.1.11$_2$), барабарсыздыктарынын негизинде $k$=1,2 болгондо $y_i^{(k)}(x)$ функцияларынын графиги П областынан чыкпайт жана $y_i^{(k)}(x)\in C[0;h]$.

k=j болгондо $y_i^{(k)}(x)$ функцияларынын графиги П областында жатсын дейли. $y_i^{(j+1)}(x)$ *П* областында жата тургандыгын жана $y_i^{(j+1)}(x)\in C[0;h]$ экендигин далилдейбиз. (3.1.10), формуласында $k=j+1$ десек, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y_i^{(j+1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(s,y_1^{(j)}(s),...,y_1^{(j)}(s))ds,\qquad i=1,2,...,n \ (3.1.10_{j+1})$$

Болжол боюнча $y_i^{(j)}, |x-x_0|\le h$ болгондо, П областында жаткандыктан жана $y_i^{(j)}(x)\in C[0;h]$ болгондуктан,

$$\left|f_i(s,y_i^{(j)}(s),...,y_n^{(j)}(s))\right|\le M$$

Акыркы барабарсыздыкты колдонуп, (3.1.10$_{j+1}$)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(j+1)}(x)-y_i^0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f_i(s, y_1^{(j)}(s),\dots,y_n^{(j)}(s))\right| ds\right| \le M\left|x-x_0\right| \le M\cdot h$$

Мындан теореманын шартын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(j+1)}(x)-y_i^0\right| \le M\frac{b}{M}=b$$

Бул болсо $|x-x_0|\le h$ болгондо $y_i^{(j+1)}(x)$ функцияларынын графиги $\Pi$ областынан чыкпайт. Жогорудагыдай эле (3.1.10) формуласынан $y_i^{(j+1)}(x)\in C[0;h]$ экендиги келип чыгат.

Демек, биз ($3.1.10_к$) формуласы аркылуу

$$\left\{y_i^{(k)}(x)\right\} \qquad i=1,2,\dots,n, \quad k=1,2,\dots \tag{3.1.12}$$

функциялардын $n$ удаалаштыгын түздүк. Ушул удаалаштыктардын предели жашаарын жана ал (3.1.9) интегралдык теңдемесинин чыгарылышы боло тургандыгын көрсөтөбүз. Ал үчүн төмөндөгүдөй катар түзөбүз:

$$y_i^0(x)+\left[y_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)}\right]+\left[y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}\right]+\dots+\left[y_i^{(j)}(x)-y_i^{(j-1)}\right]+\dots \tag{3.1.13}$$

(3.1.13) катарынын бир калыпта жана абсолюттук жыйнала тургандыгын далилдейбиз.

($3.1.10_1$) формуласынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(1)}(x)-y_i^0(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f_i(s, y_1^0,\dots,y_n^0\right| ds\right| \le M\left|x-x_0\right| \tag{$3.1.14_1$}$$

($3.1.10_k$) формуласында $k$=2 болгондон $k$=1ди кемитип, төмөнкүнү алабыз:

$$\left|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^{(1)}(s),\dots,y_n^{(1)}(s)\right)-f_i(s)\left(y_1^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i\left(s, y_1^{(1)}(s),\dots,y_n^{(1)}(s)\right)-f_i(s)\left(y_1^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)\right|ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} N\sum_{i=j}^{n}\left|y_i^{(1)}(s)-y_i^0\right|ds\right| \le Mn\left|\int_{x_0}^{x}\left|s-x_0\right|ds\right| = \frac{nNM\left|x-x_0\right|^2}{2!}. \tag{$3.1.14_2$}$$

Биз бул барабарсыздыкта $f_i$ функциялары Липшицтин шартын канааттандыра тургандыгын жана $(3.1.14_1)$ барабарсыздыгын колдондук. $(3.1.10_k)$формуласында $k$=3 болгондон $k$=2 болгонду кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f_i(s,y_1^{(2)}(s),\ldots,y_n^{(2)}(s)-f_i(s)(y_1^{(1)},\ldots,y_n^{(1)}(s))ds\le\right.$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(s,y_1^{(2)}(s),\ldots,y_n^{(2)}(s))-f_i(s)y_1^{(1)}(s),\ldots,y_n^{(1)}(s))\right|ds\right|\le \qquad (3.1.14_3)$$

$$N,\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i^{(2)}-y_i^{(1)}(s)\right|ds\right|\le N^2n^2M\cdot\frac{|x-x_0|^3}{3!}$$

Бул барабарсыздыкты алганда, Липшицтин шартын жана $(3.1.14_2)$ барабарсыздыктыгын колдондук. Эми каалаган натуралдык $j\ge 2$ үчүн төмөнкүдөй барабарсыздык аткарыла тургандыгын далилдейбиз:

$$\left|y_i^{(j)}(x)-y_i^{(j-1)}(x)\right|\le N^{j-1}n^{j-1}M\frac{|x-x_0|^j}{j!};\qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.1.14_j)$$

Бул барабарсыздыктын $j$=2,3 болгондо аткарыла тургандыгы $(3.1.14_2)$, $(3.1.14_3)$ келип чыгат. $(3.1.14_j)$ барабарсыздыгы каалагандай сан $j$=ℓ аткарылсын дейли. Бул барабарсыздыктын $j$= ℓ +1 саны үчүн аткарыла тургандыгын далилдейбиз. $(3.1.10_k)$ формуласында k= ℓ +1ден k=ℓ ди кемитип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|y_i^{(l+1)}(x)-y_i^{(l)}(x)\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f_i(s,y_1^{(l)}(s),\ldots,y_n^{(l)}(s)-f_i(s)y_1^{(l-1)},\ldots,y_n^{(l-1)}(s)))ds\le\right.$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(s,y_1^{(l)}(s),\ldots,y_n^{(l)}(s))-f_i(s)y_1^{(l-1)}(s),\ldots,y_n^{(l-1)}(s))\right|ds\right|\le$$

$$\le N\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i^{(l)}-y_i^{(l-1)}(s)\right|ds\right|\le Nn^{\ell-1}\cdot nM\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|s-x_0|^3}{l!}ds\right|=MN^ln^l\frac{|x-x_0|^{l+1}}{(l+1)!},$$

$$i=1,2,\ldots,n$$

Демек, (3.1.14) формуласынын $j=\ell+1$ тууралыгы далилденди. Математикалык индукция методунун негизинде (3.1.14$_j$) формуласы каалаган натуралдык сан үчүн туура экендиги келип чыгат. $|x-x_0|\le h$ экендигин эске алып жана (3.1.14)-(3.1.14) барабарсыздыктарын колдонуп, (3.1.13) функционалдык катарынын мажоранттык катары төмөнкүдөй сандык катар экендиги келип чыгат:

$$M_0+Mh+Mh^2\frac{nN}{2!}+Mh^3\frac{N^2n^2}{3!}+\ldots+\frac{Mh^j}{j!}(Nn)^{j-1}+\ldots \quad 3.1.15)$$

(3.1.15) сандык катарынын жыйналуучулугун Даламбердин белгиси боюнча текшеребиз. Жалпы мүчө

$$\alpha_j=\frac{Mh^j}{j!}(Nn)^{j-1}, \qquad \alpha_{j+1}=\frac{Mh^{j+1}}{(j+1)!}(Nn)^j$$

Эреже боюнча

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}=\lim_{j\to\infty}\frac{Mh^{j+1}(Nn)^j}{(j+1)!}\cdot\frac{j!}{Mh^j(Nn)^{j-1}}=\lim_{j\to\infty}\frac{hnN}{j+1}=0$$

Демек $q=0<1$. Ошондуктан сандык катар жыйналуучу болот. Вейерштрасстын теоремасы боюнча (3.1.13) функционалдык катары абсолюттук жана бир калыпта жыйналат. (3.1.13) катарынын $k$ мүчөсүнүн суммасы (3.1.12) удаалаштыгынын $k$-мүчөсүнө барабар. Демек, катардын жыйналуучулугу менен удаалаштыктын жыйналуучулугу тең күчтө. Ушунун негизинде жана катардын жыйналуучулугунан (3.1.12) удаалаштыгы пределге ээ жана предели үзгүлтүксүз функция болот.

$$\lim_{n\to\infty}y_i^{(n)}(x)=\phi_i(x), \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{3.1.16}$$

Эми $\phi_i(x)$, функциялары (3.1.9) системасын канааттандыра тургандыгын далилдейбиз. Ал үчүн (3.1.10$_k$) формуласында $k\to\infty$ пределге өтөбүз

$$\lim_{n\to\infty}y_i^{(k)}(x)=y_i^0+\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x}f_j(s,y_1^{(k-1)}(s),\ldots,y_1^{(k-1)}(s))ds \tag{3.1.17}$$

$f_i(s,y_1^0,\ldots,y_n)$ функциялары үзгүлтүксүз болгондуктан, туюк $\Pi$ областында бир калыпта үзгүлтүксүз болот.

(3.1.16)дан каалаган $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon)$ номери жашап,

$$\left|y_i^{(k-1)}(x) - \phi_i(x)\right| < \delta \qquad (3.1.18)$$

$\forall k-1 > N(\varepsilon)$ болгондо, каалаган $x$, $|x - x_0| \le h$.

Демек, эгерде $\left|y_i^{(k-1)} - \phi_i(s)\right| < \delta$ болсо,

$$\left|f_i(s, y_1^{(k-1)}(s), ..., y_1^{(k-1)}(s)) - f_i(s, \phi(s), ..., \phi_n(s))\right| < \varepsilon \qquad (3.1.19)$$

болот. Акыркы барабарсыздык (3.1.18) боюнча $k-1 > N(\varepsilon)$ болгондо аткарылат. (3.1.16) катышын жана (3.1.19) барабарсыздыгын колдонуп, (3.1.17) катышынан төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\varphi_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, \varphi,(s), ..., \varphi_n(s) ds + \lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x}$$

$$\left[f_i(s, y_1^{(k-1)}(s), ..., y_n^{(n-1)}(s)) - f_i\ (s, \varphi_1(s), ..., \varphi_n(s)\right] ds \qquad (3.1.20)$$

(3.1.19) барабарсыздыгын колдонуп,

$$f_i(s, y_1^{(k-1)}(s), ..., y_1^{(k-1)}(s)) - f_i(s, \phi_1(s), ..., \phi_n(s) < \varepsilon$$

$$k-1 > N(\varepsilon) \qquad (3.1.21)$$

Мында $\varepsilon \to 0$ эгерде $k \to \infty$ (3.1.21) барабарсыздыгынын негизинде

$$\int_{x_0}^{x} \left(f_i s, y_1^{(k-1)}, .., y_1^{(k-1)}\right) - f_i(s, \phi_1(s), ..., \phi_n(s)) ds < \varepsilon \int_{x_0}^{x} ds < \varepsilon(x - x_0) < \varepsilon h.$$

Демек,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} (f_i(s, y_1^{(k-1)}, .., y_n^{(k-1)}) - (f_i(s, \phi_2(s), .., \phi_n(s) ds = 0 \qquad (3.1.22)$$

(3.1.22) негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\phi_i(x) = y_i^0 + \int_{x_1}^{x} f_i(s, \phi_1(s), ..., \phi_n(s)) ds, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (3.1.23)$$

Акыркы теңдештик $\phi_i(x)$ функциялары (3.1.9) интегралдык теңдемелер системасынын чыгарылышы экендигин көрсөтөт.

(3.1.9) теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгын далилдейбиз. Далилдөөнү тескерисинче эки чыгарылышы бар деп алып жүргүзөбүз. Экинчи чыгарылыш $\psi_i(x)$. Бул эки чыгарылыштан төмөнкүдөй функция түзөбүз:

$$\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(x)-\psi_i(x)|\equiv g(x) \tag{3.1.24}$$

$\phi_i(x),\psi_i(x)$ болгондуктан, $g(x)\neq 0$ жок дегенде бир чекитте $x^*$ нөлгө барабар эмес $g(x)$ тин үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде $g(x)$ ушул чекиттин кандайдыр бир $\varepsilon$ аймагында нөлдөн айырмалуу болот.

Демек $g(x)\neq 0$

$$|x^*-x|\le\varepsilon \tag{3.1.25}$$

Ал чекитти $x_0$го жакын кылып алууга болот.

$\psi_i(x)$ функциялары төмөнкүдөй теңдештикти канааттандырат.

$$\psi_i(x)\equiv y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(s,\psi_1(s),\dots,\psi_n(s))ds, \qquad i=1,2,\dots,n \tag{3.1.26}$$

(3.1.23) теңдештигинен (3.1.26) теңдештигин кемитебиз

$$\varphi_i(x)-\psi_i(x)\equiv\int_{x_0}^{x}(f(s,\varphi_1(s),\dots,\varphi_n(s))-(f(s,\psi_1(s),\dots,\psi_n(s))ds, i=1,2,\dots,n \tag{3.1.27}$$

(3.1.27) теңдештигинен $x=x_0$ болгондо $\phi_i(x_0)=\psi_i(x_0),\ i=1,2,\dots,n$ келип чыгат. (3.1.27)ден

$$|\phi_i(x)-\psi_i(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}\ |f_i(s,\phi_1,\dots,\phi_n(s))-f_i(s,\psi_1,\dots,\psi_n(s))|ds\right|\le$$

$$\le N\sum_{i=1}^{n}\max|\phi_i(s)-\psi_1(s)|$$

же (3.1.24) белгилөөнүн негизинде

$$g(x)\le N\quad n\max\quad g(x)|x-x_0|,|x-x_0|\le\varepsilon \tag{3.1.28}$$

$g(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, $|x-x^*|\le\varepsilon$ туюк областында өзүнүн эң чоң маанисин кабыл алат. Ал чекит $x^{**}$ болсун дейли. Анда (3.1.28) барабарсыздыгынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$g(x^{**}) \le N \cdot n \cdot g(x^{**})|x - x_0|$$

Мындан

$$1 \le N \cdot n|x - x_0| \le Nn \cdot \varepsilon \qquad (3.1.29)$$

$x_0$ чекитин $x^{**}$ чекитине эң жакын кылып алууга болот. Ошондуктан, $Nn\varepsilon < 1$.

Демек, 1<1 деген карамакаршылык алабыз. Бул карама-каршылыкты эки чыгарылыш бар дегенден алдык. (3.1) теоремасы толук далилденди.

## § 3.2. Тартиби төмөндөтүүчү жогорку тартиптеги кээ бир дифференциалдык теңдемелер

1. Бизге $n$-тартиптеги төмөнкүдөй теңдеме берилсин.

$$y^{(n)} = f(x), \qquad a \le x \le b \qquad (3.2.1)$$

мында $f(x)$ $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция. (3.2.1) теңдемесин төмөнкү түрдө жазабыз $dy^{(n-1)} = f(x)dx$ акыркы барабардыкты $x_0$дөн $x$ке чейин интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(s_1)ds_1 + c_1$$

Акыркы теңдемеден $y^{(n-1)}(x) = \dfrac{dy^{(n-2)}}{dx}$ түрүндө жазып, $dx$ке эки жагын көбөйтүп, $x_0$дөн $x$ке интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{S_1} f(s_2)ds_2ds_1 + C_1(x - x_0) + c_2$$

Дагы $n$–2 жолу интегралдап, төмөндөгү формулага ээ болобуз

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s_n}\int_{x_0}^{s_{n-1}}\dots\int_{x_0}^{s_3}\int_{x_0}^{s_2} f(s_1)ds_1\dots ds_n + c_1\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} +$$

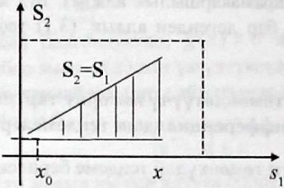
$$+ \dots + c_{n-1}(x - x_0) + c_n \qquad (3.2.2)$$

Бул формуладагы биринчи кошулуучуну ыңгайлуу түргө өзгөртөбүз, ал үчүн төмөнкүдөй кош интегралды карайбыз:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s_1} f(s_2)ds_2ds_1$$

Мында интеграл алуунун ордун которобуз, анда 1- чийме боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s_1} f(s_2)ds_2ds_1 = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{s_2}^{x} ds_1\right) f(s_2)ds_2 = \int_{x_0}^{x}(x-s_2)f(s_2)ds_2 \qquad (3.2.3)$$




*1-чийме*

(3.2.3)тү колдонуп, (3.2.2) ден төмөнкүнү алабыз.

$$\int_{x_0}^{s_4}\int_{x_0}^{s_3}(s_3-s_1)f(s_1)ds_1ds_3 = \int_{x_0}^{s_4}\int_{x_0}^{s_3}(s_3-s_1)f(s_1)ds_1ds_3 =$$

$$= \int_{x_0}^{s_4}\frac{(s_3-s_1)^2}{2}\underset{\substack{s_3=s_3\\ x_3-s_1}}{\quad} f(s_1)ds_1 = \int_{x_0}^{s_4}\frac{(s_4-s_1)^2}{2}f(s_1)ds_1$$

Ушул жолду $n$–2 жолу кайталап, (3.2.2)нин биринчи кошулуучусунан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{x_0}^{x/4}\int_{x_0}^{s_n}\frac{(s_3-s_1)^{n-2}}{(n-2)!}f(s_1)ds_1ds_n = \int_{x_0}^{x}\int_{s_1}^{x}\frac{(s_n-s_1)^{n-2}}{(n-2)!}ds_nf(s_1)ds_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{(s_n-s_1)^{n-1}}{(n-1)!}\underset{\substack{s_n=x\\ S_n-s_1}}{\quad} f(s_1)ds_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-s_1)^{n-1}f(s_1)ds_1 \qquad (3.2.4)$$

(3.2.4)тү (3.2.2)ге коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-s_1)^{n-1}f(s_1)ds_1 + c_1\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + c_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n \qquad (3.2.5)$$

Мында $\dfrac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-s_1)^{n-1}f(s_1)ds_1$ функциясы (3.2.1) теңдемесинин жекече чыгарылышы, ал эми

$$c_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+c_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n$$

$y^{(n)}(x)=0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы, $C_1,\ldots,C_n$ эркибизче алган турактуу чоңдуктар.

Мисал. Төмөнкү теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\ln x.$$

Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы (3.2.5) формуласын колдонсок төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x)=\frac{1}{2!}\int\limits_1^x(x-s)^2\ln s ds+c_1(x-1)^2+c_2(x-1)+c_3.$$

Биринчи интегралды бөлүктөп интегралдап, төмөнкүнү табабыз

$$Y(x)=\frac{1}{2!}\int\limits_1^x(x-s)^2\ln s ds=\left\{\begin{aligned}&u=\ln s\\&dv=(x-s)^2ds\\&du=\frac{1}{s}ds\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{(x-s)^3}{3}\ln s\Big|_1^x+\frac{1}{3}\int\limits_1^x\frac{(x-s)^3}{s}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_1^x\left(\frac{x^3}{s}-\frac{3x^2s}{s}+\frac{3s^2x}{s}-\frac{s^3}{s}\right)ds=\frac{1}{6}\left(x^3\ln x-3x^2(x-1)+\frac{3x}{2}(x^2-1)-\frac{x^3-1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Демек, бул функция берилген теңдеменин $Y(1)=0, Y'(1)=0, Y''(1)=0$ баштапкы шартын канааттандырган жеке чыгарылышы. $Y(x)$ чыгарылышын жалпы чыгарылыштын ордуна коюп жана $c_1, c_2, c_3$ турактуу чоңдуктары эркибизче алынган турактуу болгондуктан, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$y(x)=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+c_1x^2+c_2x+c_3.$$

2. Төмөнкү түрдөгү дифференциалдык теңдеме берилсин:

$$F(y^{(n)},y^{(n-1)})=0 \qquad (3.2.6)$$

Эгерде (3.2.6) дан $F$ функциясын $y^{(n)}$ге карата чечсек, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y^{(n)}(x)=f(y^{(n-1)}(x)) \qquad (3.2.7)$$

Төмөнкүдөй белгисиз функция кийребиз:

$$z=y^{(n-1)}(x) \qquad (3.2.8)$$

анда (3.2.7.) $z$ке карата төмөнкү түргө ээ болот:

$$z'(x)=f(z) \qquad (3.2.9)$$

(3.2.9) өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме, мындан

$$\frac{dz}{f(z)}=ds \qquad же \qquad x+c_1=\int_{x_0}^{z}\frac{ds}{f(s)} \qquad (3.2.10)$$

$f(z)$ функциясы нөлгө айланбаган чекиттерде (3.2.10) теңдемесин $z$ке карата чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$z=\phi(x,c_1) \qquad (3.2.11)$$

(3.2.11) туюнтмасын (3.2.8) ге койсок, анда

$$y^{(n-1)}(x)=\phi(x,c_1)\,. \qquad (3.2.12)$$

Бул (3.2.12) биз караган (3.2.1) түрүндөгү теңдеме. Мунун чыгарылышы төмөнкү формула менен берилет:

$$y(x)=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-s_1)^{n-2}\phi(s_1,c_1)ds_1+c_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+...+c_n \qquad (3.2.13)$$

(3.2.13) берилген (3.2.6) теңдемесининин жалпы чыгарылышы. Эгерде (3.2.6) теңдемесининин параметрдик формасы берилсе

$$y^{(n)}=\phi(t), \qquad y^{(n-1)}=\psi(t) \qquad (3.2.14)$$

Анда (3.2.14)түн биринчи теңдемесинен:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(t)$$

*же*

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{\varphi(t)}$$

$dy^{(n-1)} = \psi'(t)dt$ экендигин эске алып:

$$dx = \frac{\psi'(t)dt}{\phi(t)}$$

мындан

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)ds}{\phi(s)} + c_1$$

$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi(t)\dfrac{\psi'(t)dt}{\phi(t)}$ формуласына ээ болобуз:

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\phi(t)} + c_2$$

Ушул жолду $n$–2 жолу кайталап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)ds}{\phi(s)} + c_1, \qquad y(t) = z(t, c_2 c_3, \ldots, c_n) \quad (3.2.15)$$

(3.2.15), (3.2.6) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формадагы теңдемеси. Эгерде (3.2.15) теңдемесин $t$ параметрине карата чыгарсак, анда төмөнкүдөй жалпы чыгарылышка ээ болобуз:

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \quad (3.2.16)$$

3. Бизге төмөнкү түрдөгү дифференциалдык теңдеме берилсин:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \quad (3.2.17)$$

$F$ функциясы айкын эмес функциянын теоремасынын шартын канааттырсын, анда (3.2.17)ни $y^{(n)}$ карата чыгарып,

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}) \text{ ни алабыз} \quad (3.2.18)$$

Бул теңдемеге төмөнкүдөй ордуна коюуну колдонобуз:

$$y^{(n-2)} = z \quad (3.2.19)$$

анда (3.2.18) төмөнкү түрдө жазылат.

$$z''=f(z) \tag{3.2.20}$$

Мындан $z'=p(z)$ деп белгилесек, анда

$$z''=\frac{dz'}{dx}=\frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=p(z)\frac{dp}{dz}$$

же муну (3.2.20) коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$p\frac{dp}{dz}=f(z) \tag{3.2.20}$$

Акыркы теңдеме изделүүчү $p(z)$ функциясына карата өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме, ошондуктан

$$\frac{p^2}{2}=\int_{z_0}^{z} f(s)ds+c_1 \qquad же \qquad p=\mp\sqrt{2\int_{z_0}^{z} f(s)ds+c_1}$$

Мындан $p=z'$ экендигин эске алсак, анда

$$\frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{2\int_{z_0}^{z} f(s)ds+c_1}$$

Мындан

$$\pm\int_{z_0}^{z}\frac{ds}{\sqrt{2\int_{z_0}^{s} f(r)dr+c_1}}=x+c_2 \tag{3.2.22}$$

(3.2.22)ни $z$ке карата чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$z=\phi(x,c_1,c_2) \tag{3.2.23}$$

(3.2.23)тү (3.2.19)га коюп, $y$ ке карата 1-пункта каралган (3.2.1) түрдөгү теңдемеге ээ болобуз:

$$y^{(n-2)}=\phi(x,c_1,c_2) \tag{3.2.24}$$

(3.2.24) теңдемесин $n$–2 жолу интегралдасак, анда

$$y(x)=\frac{1}{(n-3)}\int_{x_0}^{x}(x-s)^{n-3}\phi(s,c_1,c_2)ds+c_3\frac{(x-x_0)^{n-3}}{(n-3)!}+c_4\frac{(x-x_0)^{n-4}}{(n-4)!}+\ldots+$$

$$+c_{n-1}(x-x_0)+c_n \tag{3.2.25}$$

(3.2.25) берилген (3.2.17) теңдемесинин жалпы чыгарылышы. (3.2.17) теңдемесинин параметрдик түрү белгилүү болсун дейли.

$$y^{(n)} = \phi(t); \qquad y^{(n-2)} = \psi(t); \tag{3.2.26}$$

$$(y^{(n-1)})' = \phi(t); \; y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})'$$

Мындан

$$dy^{(n-1)} = \phi(t)dx\, d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)}dx \tag{3.2.27}$$

Акыркы теңдемеден

$$\frac{dy^{(n-1)}}{\phi(t)} = \frac{d(y^{(n-2)})}{y^{(n-1)}} \quad æ\ å \quad y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \phi(t)dy^{(n-2)}$$

Ал эми (3.2.26)нын экинчи теңдемесинен $dy^{(n-2)} = \psi'(t)dt$

Мындан

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int_{z_0}^{z} \phi(s)\psi'(s)ds + c_1}$$

(3.2.27) экинчи формуласынан *dx*ти *dt* аркылуу туюнтабыз

$$dx = \frac{\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int_{t_0}^{t} \phi(s)\phi'(s)ds + c_2}} \tag{3.2.28}$$

Бул теңдеменин эки жагын интегралдап, төмөнкүдөй формулага ээ болобуз:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)ds}{2\sqrt{\int_{t_0}^{t} \phi(t)\psi'(t)dt + c_1}} + c_2 \tag{3.2.29}$$

(3.2.28)ди колдонуп, (3.2.26) экинчи теңдемесинен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$dy^{(n-3)} = \psi(t)dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int_{t_0}^{t} \phi(s)\psi'(s)ds + c_2}}$$

Бул теңдемени интегралдап, төмөнкүдөй теңдемеге келебиз:

$$y^{(n-3)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(s)\psi'(s)dt}{\sqrt{2\int_{t_0}^{t}\phi(r)\psi'(r)dr + c_1}} + c_3$$

Ушул жолду $n$–3 жолу кайталап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(t) = z(t, c_1, c_2, ..., c_n) \tag{3.2.30}$$

(3.2.29), (3.2.30), (3.2.17) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын параметрдик формасы. Эгерде бул эки теңдемеден $t$ параметрин чыгарып салууга мүмкүн болсо, анда (3.2.17)нин жалпы интегралын алабыз.

Мисал. $y'' = y$ теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

$y' = p(y)$ ордуна коюп колдонобуз. Мындан

$$\frac{d}{dx}(y') = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Берилген теңдеме $p$га карата төмөнкүдөй жазылат:

$$p\frac{dp}{dy} = y.$$

Бул теңдеме $p$га карата өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме. Өзгөрмөлөрүн ажыратып интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$pdp = ydy, \quad p^2 = y^2 + c, \text{ же } p = \pm\sqrt{y^2 + c}$$

мында $c$ – каалаган турактуу чоңдук.

Демек, $y$ке карата төмөнкүдөй теңдеме алабыз:

$$y' = \pm\sqrt{y^2 + c}, \quad -\infty \prec c \prec \infty.$$

Төмөнкүдөй учурларды карайбыз: 1) $c$=0.

Анда

$$y' = \mp y, \text{ же } \frac{dy}{dx} = \mp y, \quad \frac{dy}{y} = \mp dx.$$

Мындан интегралдап төмөнкүгө ээ болобуз

$$y = e^x c_1, \quad y = e^{-x} c_2.$$

2) $c<0$. Анда

$$y' = \pm\sqrt{y^2 - c^2}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \pm dx.$$

Интегралдасак

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - c^2}) = \pm x + c_1 \text{ потенцирлесек:}$$

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = c\, e^{\pm}$$

$$y - \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{1}{c_1} e^{\mp x}.$$

Экөөнү кошсок

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Демек, бул берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы.

## § 3.3. Жогорку тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер. Жалпы касиеттери.

Эгерде теңдеме изделүүчү функция $y(x)$ жана анын туундулары $y'(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ ке карата сызыктуу функция болсо, анда мындай теңдеме сызыктуу дифференциалдык теңдеме деп аталат, ал төмөнкүчө жазылат:

$$\alpha_0(x)y^{(n)} + \alpha_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x)y' + \alpha_n(x)y = f(x) \qquad (3.3.1)$$

Мында $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ жана $f(x)$, $(\alpha, b)$ интервалында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар.

$(a, b)$ интервалынын бардык чекиттеринде $\alpha_0(x) \neq 0$ болсо, анда (3.3.1)дин эки жагын $a_0(x)$ке бөлүп, төмөнкүдөй теңдемеге ээ болобуз:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (3.3.2)$$

Мында (3.3.1) болсо,

$$p_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_0(x)}, i = 1, 2, \ldots, n. \quad f(x) = \frac{f(x)}{\alpha_0(x)}$$

теңдемесинен $f(x) = 0$ болгон учурда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (3.3.3)$$

(3.3.3) бир тектүү сызыктуу теңдеме деп аталат.

Эгерде (3.3.2), (3.3.3) теңдемелеринде коэффициенттер барабар болсо, анда (3.3.3), (3.3.2)ге туура келген бир тектүү деп аталат.

Көз каранды эмес чоңдукту алмаштыруудан сызыктуу теңдеме (3.3.2) сызыктуулугун сактайт. Чындыгында

$$x = \phi(\xi), \quad \alpha \le \xi \le \beta \tag{3.3.4}$$

$\xi \in [\alpha, \beta]$ болгондо $\phi(\xi) \in [a,b]$ орундалсын дейли жана $\phi'(\xi) \ne 0, \quad \xi \in [a,b]$. Бул учурда $\phi(\xi)$ функциясынын тескери функциясы жашайт. Эми $y$ тин $x$ боюнча туундуларын $\xi$ боюнча алмаштырабыз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{1}{\phi'(\xi)}.$$

Экинчи туундусу төмөнкүдөй эсептелет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{1}{\phi'(\xi)}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{1}{\phi'(\xi)}\right)\frac{d\xi}{dx} =$$

$$= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{1}{\phi'(\xi)}\right)\frac{1}{\phi'(\xi)} = \left(\frac{1}{\phi'(\xi)}\right)^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{\phi''(\xi)}{[\phi'(\xi)]^2} \cdot \frac{dy}{d\xi}. \tag{3.3.5}$$

Демек, белгисиз функциянын $x$ боюнча $k$чы туундусу ошол функциянын $\xi$ боюнча $k$чы тартипке чейинки туундулары аркылуу сызыктуу туюнтулат. Биз (3.3.5)ти (3.3.2)тин ордуна коюп

$$y^{(n)}(\xi) + q_1(\xi)y^{(n-1)}(\xi) + \ldots + q_{n-1}(\xi)y'(\xi) + q_n(\xi)y = F(\phi(\xi)). \tag{3.3.6}$$

Ал эми (3.3.3)төн төмөнкүнү алабыз:

$$y^{(n)}(\xi) + q_1(\xi)y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(\xi)y' + q_n(\xi)y = 0. \tag{3.3.7}$$

Өзгөрүлмө чоңдук $y, \xi$ ден көз каранды болгон учурда сызыктуу теңдеме алдык.

$v(x)$ жана $j(x)$ функциялары $y(x)$ функциясы төмөнкүдөй формула менен байланышсын

$$y(x) = v(x)\eta(x) + j(x) \tag{3.3.8}$$

Мында $\eta(x)$ жаңы белгисиз функция, $v(x) \ne 0, \quad x \in (a,b)$

Анда

$$y'(x) = \upsilon'\eta + \upsilon\eta' + j'(x)$$

$$y''(x) = \upsilon'\eta + 2\upsilon'\eta' + \upsilon\eta'' + j''(x),$$

$$y''(x) = \upsilon^{(n)}\eta + c'_n\upsilon^{(n-1)}\eta' + ... + \upsilon\eta^{(n)} + j^{(n)}(x), \quad (3.3.9)$$

(3.3.8), (3.3.9) формулаларын (3.3.2) теңдемесине коюп, $\eta$ функциясына карата ушул эле түрдөгү сызыктуу теңдемени алабыз. Бирок (3.3.3) теңдемесин коюп, $\eta(x)$ функциясына карата бир тектүү эмес сызыктуу теңдемени алабыз. Эгерде

$$y = v(x)\eta(x) \quad (3.3.10)$$

коюу жолун колдонсок, (3.3.3)төн $\eta$ га карата бир тектүү дифференциалдык теңдеме алынат.

(3.3.10) өзгөртүп түзүү формуласын $\eta(x)$ боюнча алынган теңдемеде $n$–1 туундусун кармабаган теңдемеге алып келүү үчүн пайдаланат. Чындыгында

$$y^{(n)}(x) = v\eta^{(n)} + ... + v^{(n)}\eta$$

$$y^{(n-1)}(x) = v\eta^{(n-1)} + ... + v^{(n-1)}\eta$$

Акыркы формулаларды (3.3.3)ке коюп, төмөнкүдөй теңдеме алабыз:

$$v(x)\eta^{(n)}(x) + \left[nv'(x) + p_1(x)v(x)\right]\eta^{(n-1)} + ... \quad (3.3.11)$$

Эгерде $v(x)$ функциясын төмөнкү теңдеменин чыгарылышы десек, б.а.

$$nv'(x) + p_1(x)v(x) = 0$$

$$v(x) = \exp\left[-\frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} p_1(s)ds\right]$$

Берилген функциялар

$$p_j(x), \ i = 1, 2, ..., n, \qquad F(x)$$

$[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функциялар болсо, анда

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Коши маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз болот. Сызыктуу учурда чыгарылыш $[a,b]$ сегментинин бардык чекиттеринде аныкталат. Бул 3.1 теоремасынын жеке учуру болот.

## § 3.4. Жогорку тартиптеги бир тектүү теңдеменин негизги касиеттери

Төмөнкүдөй бир тектүү дифференциалдык теңдемени карайбыз

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) теңдемесинин сол жагын $L$ менен белгиледик. Бул $L$ операциясы $y$ функциясынан туунду алуу, аны $p_i(x)$ функцияларына көбөйтүү жана суммалоо. Мындай операцияны оператор деп атайбыз. Оператор төмөнкүдөй касиеттерге ээ, б.а. эки функциянын суммасынан алынган операция ал функциялардан алынган операциянын суммасына барабар. Чындыгында

1) $$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ p_n y_2 = L[y_1] + L[y_2] \quad (3.4.2)$$

2) $$L[cy] = cL[y] \quad (3.4.3)$$

Мында $c$ турактуу чоңдук, б.а. турактуу чоңдукту $L$ операторунун сыртына чыгарууга болот. Чындыгында

$$L[cy] = cy^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)(cy) = c(y^{(n)} +$$
$$+ p_1(x)y^{(n-1)} + p_n(x)y) = cL[y]$$

Бул касиеттерди колдонуп, төмөнкүдөй теоремаларды далилдөөгө болот.

*Теорема 3.4.1. Эгерде $y_1$ жана $y_2$ функциялары (3.4.1) теңдемесинин чыгарылыштары болсо, анда $y_1 + y_2$ да ошол теңдеменин чыгарылышы болот, мында с турактуу чоңдук.*

Д а л и л д ө ө. 3.4.2. боюнча $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$. Теореманын шарты боюнча $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$, анда $L[y_1 + y_2] = 0$.

*Теорема 3.4.2. Эгерде $y(x)$ функциясы (3.4.1) теңдемесинин чыгарылышы болсо, анда $cy(x)$ функциясы да (3.4.1)дин чыгарылышы болот, мында с турактуу чоңдук.*

Д а л и л д ө ө. 3.4.3түн негизинде $L[cy]=cL[y]$, теореманын шарты боюнча $L[y]=0$

Демек, $L[cy]=0$.

*Натыйжа.* Эгерде $y_1, y_2, ..., y_k(x)$ функциялары (3.4.1) теңдемесинин чыгарылыштары болсо, анда $c_1 y_1(x)+...+c_k y_k(x)$ функциясы дагы (3.4.1) теңдемесин канааттандырат, мында $c_1, ..., c_k$ турактуу сандар.

Д а л и л д ө ө. $L[c_1 y_1(x)+...+c_k y_k(x)]=c_1 L[y_1]+...+c_k L[y_k]$

Мында биз $L$ операторунун эки касиетин колдондук.

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x) \tag{3.4.1}$$

теңдемесинин чыгарылышы болгондуктан, $L[y_1(x)]=0$, $L[y_2(x)]=0, ..., L[y_k(x)]=0$. Буларды эске алып, акыркы барабардыктан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L[c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+...+c_k y_k(x)]=0$$

Эгерде $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $n$ функциясы берилсе ар бири (3.4.1) дин чыгарылышы болсо, натыйжанын негизинде

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+...+c_n y_n(x)$$

функциясы (3.4.1) теңдемесин канааттандырат. Ушул функция (3.4.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы боло алабы деген суроону коебуз.

*Аныктама.* Эгерде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандары табылып, мунун эң жок дегенде бирөө нөлгө барабар эмес болуп, төмөнкүдөй теңдештик

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+...+\alpha_n y_n(x)=0 \tag{3.4.4}$$

$x$тин *(а, в)* интервалдагы бардык маанилери үчүн аткарылса, анда $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ функциялары *(а,в)* интервалында сызыктуу көз каранды деп аталат.

Эгерде (3.4.4) $x$тин бардык маанилеринде аткарылбаса, анда $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ сызыктуу көз каранды эмес функциялар деп аталат, же $c_1=c_2=...=c_n=0$ болгондо эле аткарылса.

***1-мисал.*** Төмөнкү функциялар

$$1, x, x^2, ..., x^n \tag{3.4.5}$$

бардык сандык окто, б.а. $x \in (-\infty, \infty)$ сызыктуу көз каранды эмес.

Д а л и л д ө ө. Тескерисинче $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ эщ жок дегенде $\alpha \neq 0$ сандар табылып,

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0 \qquad (3.4.6)$$

теңдештиги *x*тин бардык маанилеринде аткарылсын дейли. Бирок (3.4.6) *n*–тартиптеги алгебралык теңдеме, алгебранын негизги теоремасы боюнча (3.4.6) $x_1, x_2, ..., x_n$ чекиттеринде гана орун алат. Демек, (3.4.6) *x*тин бардык маанилери үчүн орун алат дегенге карама-каршылык алдык. Бул болсо (3.4.5) функциялары сызыктуу көз каранды эмес дегенди билдирет.

***2-мисал.***

$$x^{k_1}, x^{k_2}, ..., x^{k_n}, \; x \in (0; \infty) \qquad (3.4.7)$$

$k_1 < k_2 < .... < k_n$ болгондо сызыктуу көз каранды эмес.

Д а л и л д ө ө. Тескерисинче бул функциялар сызыктуу көз каранды болсун дейли, б.а. эң жок дегенде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ бирөө нөлгө барабар эмес сандар табылып, төмөнкү теңдештик орун алсын дейли:

$$\alpha_0 x^{k_1} + \alpha_1 x^{k_2} + ... + \alpha_n x^{k_n} = 0, \quad x \in [0, \infty] \qquad (3.4.8)$$

Бул барабардыктын эки жагын $x^{k_1}$ -ге бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x^{k_2 - k_1} + ... + \alpha_n x^{k_n - k_1} = 0,$$

Акыркы теңдештик *x*-тин бардык маанилеринде орун алат. Демек *x=0* десек $\alpha_1 = 0$ Акыркы теңдештик төмөнкү түргө келет:

$$\alpha_2 x^{k_2 - k_1} + ... + \alpha_n x^{k_n - k_1} = 0 \qquad (3.4.9)$$

Мында

$$0 < k_2 - k_1 < k_3 - k_1 < ... < k_n - k_1$$

(3.4.9)дун эки жагын $x^{k_2 - k_1}$ ге бөлүп,

$$\alpha_2 + x^{k_3 - k_2} + ... + \alpha_n x^{k_n - k_2} = 0$$

теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештикте x=0 деп $\alpha_2 = 0$ алабыз. Ушул жолду улантып, $\alpha_n = 0$ ду алабыз, б.а. бардык $\alpha_i = 0, i = 1, ..., n$. Демек, $x^{k_1}, ..., x^{k_n}$ сызыктуу көз каранды эмес.

***3-мисал.*** 1, $\cos^2 x, \sin^2 x$ функциялары бардык сандык окто $(-\infty, +\infty)$ сызыктуу көз каранды. Мында $\alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = -1, \; \alpha_3 = -1$. Бизге $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары берилсин. Бул функциялар *n*–1чи тартипке чейинки туундуларга ээ болсун, мында $x \in (a,b)$. Төмөнкүдөй аныктагыч түзөбүз.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & \dots & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad x \in (a,b). \quad (3.4.10)$$

Бул аныктагыч Вронскийдин аныктагычы деп аталат.

*Теорема 3.4.3 Эгерде* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *функциялары* $(a,\ b)$ *интервалында сызыктуу көз каранды болсо, анда бул функциялардан түзүлгөн Вронскийдин аныктагычы теңдеш нөлгө барабар.*

Д а л и л д ө ө: Сызыктуу көз карандылыктын негизинде төмөнкүдөй теңдештик орун алат:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \qquad x \in (a,b) \qquad (3.4.11)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ турактуу сандар эң жок дегенде бирөө нөл эмес, анык болуш үчүн $\alpha_n \neq 0$ (3.4.11) ден төмөнкү теңдештикке ээ болобуз:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1} \qquad (3.4.12)$$

Мында $\qquad \beta_1 = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n}, i = 1, 2, \dots, n-1$

(3.4.12) теңдештигин удаалаш $n$–1 ге чейин туундулап, төмөнкүнү алабыз:

$$y_n^{(i)}(x) = \beta_1 y_1^{(i)} + \beta_2 y_1^{(i)} + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.4.13)$$

(3.4.10) аныктагычынын биринчи мамычасын – $\beta_1$ ге экинчи мамычасын $-\beta_2, .., (n-1)$ – мамычасын $-\beta_{n-1}$ ге көбөйтүп жана алынган мамычалардын элементтерин $n$–мамычага кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n - \beta_1 y - \dots - \beta_{n-1} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y'_n - \beta_1 y' - \dots - \beta_{n-1} y'_{n-1} \\ - & - & \dots & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-1)} - \beta_1 y_1^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Бул аныктагычтын акыркы мамычасы (3.4.12), (3.4.13) теңдештиктеринин негизинде нөлгө барабар. Демек, $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$

Эгерде $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары (3.4.1) теңдемесинин чыгарылышы болсо, анда төмөнкүдөй теорема туура болот.

*Теорема 3.4.4. Эгерде $y_1, y_2, ..., y_n$ чыгарылыштары (a,b) интервалында сызыктуу көз каранды эмес болсо, анда Вронскийдин аныктагычы $W(y_1, y_2, ..., y_n)$, (a,b) интервалынын бир да чекитинде нөлгө барабар эмес.*

Д а л и л д ө ө. Тескерисинче аныктагыч $W(x)$ $x_0$ чекитинде нөлгө барабар болсун. 3.4.1-3.4.2 теоремаларынын натыйжасынын негизинде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \tag{3.4.14}$$

(3.4.14) функциясы (3.4.1) теңдемесинин чыгарылышы болот. Төмөнкүдөй баштапкы шартты карайлы:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{3.4.15}$$

(3.4.4)тү ($n$–1) жолу туундулап, $y(x)$ тин туундуларында $x$=$x_0$ десек, анда

$$\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = 0 \\ &C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ &C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Бул системанын аныктагычы $W(x_0)$. Чыгарылыштын жашашынын жана жалгыздыгынын негизинде (3.4.15) шартын канааттандырган чыгарылыш $y(x)$=0.

Жогоруда биз $W(x_0)$=0 дедик. Анда (3.4.16) системасынан бардыгы нөлгө барабар болбогон $C_1, C_2, ..., C_n$дер жашайт жана $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... C_n y_n(x) = 0$ теңдештиги орун алат, б. а. $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары сызыктуу көз каранды дегенди билдирет. Ошентип карама-каршылыкка келдик. Демек, биздин $W(x_0)$=0 дегенибиз туура эмес. Теорема далилденди.

*Аныктама.* (3.4.1) теңдемесинин сызыктуу көз каранды эмес каалаган $n$ чыгарылышынын системасы фундаменталдык система деп аталат.

Төмөнкүдөй теорема орун алат.

*Теорема 3.4.5 Эгерде (3.4.1) теңдемесинин коэффциенттери (а,в) интервалында үзгүлтүксүз болсо, анда бардык учурда фундаменталдык системасы жашайт.*

Д а л и л д ө ө. Төмөнкүдөй аныктагыч

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.4.17)$$

нөлгө барабар болбогондой кылып $n^2$ санды тандап алабыз. $x_0$ чекитинде төмөнкүдөй баштапкы шартты

$$y_i(x_0) = \alpha_{i1}, y_i'(x_0) = \alpha_{i2}, \dots, y_i^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

канааттандырган $y_i(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ жекече чыгарылыштарын аныктайбыз. Жашоо теоремасы боюнча мындай чыгарылыштар жашайт жана *(a,b)* интервалынын бардык чекиттеринде аныкталат. (3.4.17) аныктагычынын чоңдугу $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялары үчүн түзүлгөн Вронскийдин аныктагычынын $W(y_1, y_1, \dots, y_n)$ $x = x_0$ чекитиндеги маанисинин чоңдугуна барабар. Демек, биздин түзүү боюнча $W(x_0) \neq 0$. Анда 3.4.3 - теоремасынын негизинде $y_1, y_2, \dots, y_n$ жеке чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес функциялар болот. Аныктама боюнча ушул функциялар чыгарылыштын фундаменталдык системасын түзөт. Теорема далилденди.

*Теорема* 3.4.6. *Эгерде* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *функциялары чыгарылыштын фундаменталдык системасын түзүшсө, анда (3.4.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү формула боюнча*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots C_n y_n(x) \qquad (3.4.18)$$

аныкталат, мында $C_1, C_2, \dots, C_n$ эркибизче алынган турактуу сандар.

Д а л и л д ө ө. Жалпы чыгарылыштын аныктамасы боюнча (3.4.1) теңдемесинин каалагандай жеке чыгарылышы (3.4.18) формуласындагы $C_1, C_2, \dots, C_n$ турактуу чоңдуктарынын кандайдыр бир маанилеринде (3.4.18) формуласы боюнча аныкталаарын көрсөтөбүз. Төмөнкү шартты

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3.4.19)$$

канааттандырган (3.4.1) тендемесинин жеке чыгарылышы $y(x)$ берилсин. (3.4.18)дин эки жагын $(n-1)$ге чейин туундулап, келип чыккан формулага $x=x_0$ *деп* $C_1, C_2, ..., C_n$ чоңдугун $y(x)$ функциясы (3.4.19) шартын аткара тургандай тандайбыз.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{11}^0 + C_2 y_{21}^0 + ... + C_n y_{n1}^0 \\ y_0' &= C_1 y_{12}^0 + C_2 y_{22}^0 + ... + C_n y_{n2}^0 \\ &-------------- \\ y_0^{(n-1)} &= C_1 y_{1n}^0 + C_2 y_{2n}^0 + ... + C_n y_{nn}^0 \end{aligned}\right\} \quad (3.4.20)$$

Мында $y_{i1}^0 = y_i(x_0), y_{ik+1}^0 = y_i^{(k)}(x_0), \quad i = 1, 2, ..., n-1$ (3.4.20) сызыктуу бир тектүү эмес алгебралык системасынын аныктагычы

$$\begin{vmatrix} y_{11}^0 & y_{21}^0 \cdots y_{n1}^0 \\ y_{12}^0 & y_{22}^0 \cdots y_{n2}^0 \\ ---- & ---- \\ y_{1n}^0 & y_{2n}^0 \cdots y_{nn}^0 \end{vmatrix} \quad (3.4.21)$$

$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ функцияларынан түзүлгөн Вронскийдин аныктагычынын $x=x_0$ чекитиндеги мааниси менен дал келет. Бул функциялар чыгарылыштын фундаменталдык системасын түзгөндүктөн нөлгө барабар эмес, анда (3.4.20) системасы $C_1, C_2, ..., C_n$ карата чыгарылышка ээ жана жалгыз болот. Чыгарылышты $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n$ деп (3.4.18) ордуна коюп, төмөнкүдөй чыгарылышка ээ болобуз:

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + ... + \tilde{C}_n y_n(x)$$

Бул чыгарылыш биздин түзүү боюнча (3.4.19) шартын канааттандырат. Демек, чыгарылыштын жалгыздыгы боюнча

$$\tilde{\phi}(x) = y(x) \text{ болот.}$$

Демек теорема далилденди.

*Теорема* 3.4.7. *Эгерде* $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ *функциялары (3.4.1) теңдемесинин чыгарылыштары болсо, анда бул функциялар сызыктуу көз каранды болот.*

Д а л и л д ө ө: Эки учурду карайбыз:

*а)* $y_1, y_2, ..., y_n$, функциялары сызыктуу көз каранды болушсун. Анда аныктама боюнча $d_1, d_2, ..., d_n$ сандары жашап, мунун ичинен эщ жок дегенде бирөө нөлгө барабар эмес, мисалы $d_n \neq 0$ төмөнкү теңдештик

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_n y_n = 0, \qquad x \in (a,b)$$

орун алат. Эгерде $d_{n+1}$=0 десек, бул теңдештик менен катар төмөнкү теңдештик $d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_n y_n + d_{n+1} y_n = 0$ аткарылат, мында $d_n \neq 0$. Акыркы теңдештик берилген функциялар сызыктуу көз каранды экендигин көрсөтөт.

б) $y_1, y_2, \ldots, y_n$, функциялары сызыктуу көз каранды эмес болушсун. Анда булар чыгарылыштын фундаменталдык системасын түзүшөт. Демек, жеке чыгарылыш $y_{n+1}$ бул система аркылуу туюнтулат.

$$y_{n+1} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n$$

Бул барабардык $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ функциялары сызыктуу көз каранды экендигин көрсөтөт, теорема далилденди.

*Мисалдар.*

1. $1, \sin^2 x, \quad \cos^2 x$ функциялардын сызыктуу көз каранды экендигин көрсөткүлө.

Ч ы г а р ы л ы ш ы:

Бул функциялар үчүн Вронскийдин аныктагычын эсептейбиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} = -\sin 4x + \sin 4x = 0$$

Демек, 3.4.3 теореманын негизинде бул функциялар сызыктуу көз каранды болот.

2. $e^x, e^{2x}, e^{3x}$ функцияларын сызыктуу көз каранды эмес экендигин көрсөткүлө.

Ч ы г а р ы л ы ш ы:

Бул функциялар үчүн Вронскийдин аныктагычын эсептейбиз:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 18e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} + 4e^{6x} + 3e^{6x} - 2e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} -$$

$$-12e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} - 9e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} = e^{6x} \neq 0$$

Демек, (3.4.3)- теореманын негизинде бул функциялар сызыктуу көз каранды эмес болот.

*Теорема* 3.4.8. *Эгерде эки сызыктуу бир тектүү теңдемелер*

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \\ y^{(n)} + \overline{p}_1 y^{(n-1)} + \ldots + \overline{p}_{n-1} y' + \overline{p}_n y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.4.22)$$

жалпы бир чыгарылыштардын фундаменталдуу системасына ээ болсо, анда алар өз ара теңдеш болушат. б.а.

$$p_i(x) = \overline{p}_i(x), \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Д а л и л д ө ө. (3.4.22) теңдемелерин бири биринен мүчөлөп кемитип, $n$–1 тартиптеги жащы теңдеме алабыз.

$$(p_1 - \overline{p}_1) y^{(n-1)} + (p_2 - \overline{p}_2) y^{(n-2)} + \ldots + (p_n - \overline{p}_n) y = 0 \quad (3.4.23)$$

Эгерде $p_1 \neq \overline{p}_1$ болсо, анда алардын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде $\alpha < x < \beta$ интервалы жашап, бул интервалда

$$P_1 - \overline{P}_1 \neq 0 \quad (3.4.23)$$

теңдемесинин эки жагын $P_1 - \overline{P}_1$ ге бөлүп, *(α,β)* интервалында (3.3.3) түрүндөгү теңдеме алабыз. Биздин түзүү боюнча (3.4.23) теңдемесин (3.4.22) теңдемесинин чыгарылыштары канааттандырат. Демек (3.4.23*)* $n$–1чи тартиптеги теңдеме $n$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Бул болсо 3.4.7 теоремасына карама-каршы. Демек $P_1 \equiv \overline{P}_1$. Ушундай эле жол менен $P_2 = \overline{P}_2, \ldots, P_n = \overline{P}_n$ экендиги келип чыгат.

Төмөнкүдөй маселени чыгарабыз. *(а,в)* интервалында аныкталган $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаменталдык система берилсин, ушул система канааттандырган дифференциалдык теңдемени түзгүлө.

Ушул максат үчүн төмөнкүдөй аныктагычты нөлгө барбарлайбыз, мында $y(x)$ изделүүчү функция:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ - & - & \ldots & - & - \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4.24)$$

Бул аныктагычты акыркы мамычанын элементи боюнча ажыратып (3.4.24) барабардыгы $n$чи тартиптеги бир тектүү сызыктуу теңдеме экендигин көрүүгө болот. Эгерде $y$ функциясынын ордуна $y_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ функцияларын койсок биз эки мамычага барабар болгон аныктагычтарды алабыз, алар нөлгө барабар. Демек (3.4.24) теңдемеси $y_1, y_2, ..., y_n$ жеке чыгарылыштарына ээ болот.

$y^{(n)}$дин коэффициенти $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ ге барабар, ал *(a,в)* интервалынын бир да чекитинде нөлгө барабар эмес. (3.4.24) теңдемесинин эки жагын тең $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ ге бөлүп $y^{(n)}$дин коэффициенти бирге барабар болгон теңдеме алабыз. Мындай теңдеме биз далилдеген теорема боюнча фундаменталдык системасы менен бир мааниси аныкталат.

Демек маселе чыгарылды.

(3.4.24) теңдемесин ачып жазабыз:

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ - & - & ... & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ - & - & ... & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$y^{(n-1)} + ... + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ - & - & ... & - \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y = 0.$$

Бул теңдеменин эки жагын $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ ге бөлүп, төмөнкүдөй теңдеме алабыз:

$$y^{(n)} - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_2' \\ - & - & ... & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{n} \end{vmatrix}}{W(y_1, ..., y_n)} y^{(n-1)} + ... + \frac{\begin{vmatrix} y_1' & ... & y_n' \\ - & - & - \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, ..., y_n)} y = 0 \quad (3.4.25)$$

$y_1,\dots,y_n$ төмөнкү теңдеменин фундаменталдык чыгарылышы болсун дейли

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (3.4.26)$$

Демек $y,\dots,y$ (3.4.25) жана (3.4.26) теңдемелеринин фундаменталдык чыгарылышы. Биз далилдеген теорема боюнча булар бир эле теңдемени аныктайт. Ошондуктан, (3.4.25), (3.4.26) теңдемелеринин коэффициенттери барабар, айрым учурда

$$p_1(x)=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1 & \dots & y'_2 \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1,\dots,y_n)} \qquad (3.4.27)$$

(3.4.27) барабардыгынын оң жагындагы бөлчөктүн алымындагы аныктагыч Вронскийдин аныктагычынын туундусуна барабар. Аныктагычтын туундусу $n$ аныктагычтын суммасына барабар, биринчи аныктагыч биринчи жолчонун элементтеринен туунду алып, калганы өзгөрүүсүз, экинчи аныктагыч экинчи жолчодон туунду алып, калганы өзгөрүүсүз, ..., $n$-аныктагыч $n$-жолчодон туунду алып, калганы өзгөрүүсүз. Биздин учурда акыркы аныктагычтан бөлөгү нөлгө барабар. Демек,

$$W'(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y'_n \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Ушуну колдонуп (3.4.27)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\dfrac{dW}{dx}(y_1,\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)}=-p_1(x).$$

Акыркы Wга карата дифференциалдык теңдеме. Өзгөрүлмөлөрүн ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x)dx \qquad \text{же} \qquad \ln W = -\int_{x_0}^{x} p_1(s)ds + \ln C$$

Мындан потенцирлеп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$W(y_1..., y_n) = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(s)ds\right)$$

Эгерде Вронскийдин аныктагычынын $x_0$ чекитиндеги мааниси белгилүү болсо, анда акыркы формуладан

$$W(y_1..., y_n) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(s)ds\right) \qquad (3.4.28)$$

(3.4.28) формуласы Остроградский-Лиувиллдин формуласы деп аталат.

Бул формуладан төмөнкүдөй натыйжа алабыз: Вронскийдин аныктагычы же теңдеш нөлгө барабар, же бир да чекитте нөлгө айланбайт.

## § 3.5 Бир тектүү эмес n-тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме. Турактуу чоңдукту вариациялоо.

Төмөнкүдөй бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемени карайбыз:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... +$$
$$+ p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x) \qquad (3.5.1)$$

Мында $_1(x),..., p_n(x), f(x)$, $(a,b)$ интервалында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар. (3.5.1)ге туура келген бир тектүү теңдеме төмөнкү түрдө болот:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (3.5.2)$$

3.4.5 теореманын негизинде бул теңдеменин фундаменталдык системасы $y_1, y_2, ..., y_n$ жашайт. Бул учурда (3.5.2)нин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) \qquad (3.5.3)$$

мында $C_1, C_2, ..., C_n$ турактуу чоңдуктар.

(3.5.1) бир тектүү эмес теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз.

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+...+C_n(x)y_n(x), \qquad (3.5.4)$$

мында $C(x)_1, C_2(x),..., C_n(x)$ изделүүчү функциялар (3.5.4)түн туундуларын эсептейбиз.

$$y'(x)=C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)+...+C'_n(x)y_n(x)+C_1(x)y_1'(x)+$$
$$+C_2(x)y'_2(x)+...+C_n(x)y_n'(x) \qquad (3.5.6)$$

$C_2(x),...,C_n(x)$ функцияларын (3.5.4) функциясы (3.5.1) теңдемесин канааттандыра тургандай кылып тандап алабыз.Демек, бизде белгисиз функциялардын саны $n$ге барабар. Ал эми шартыбыз бирөө. Ошондуктан $n$–1 шартын тандап алышыбыз керек. Аларды $y'(x),..., y^{(n)}(x)$ жөнөкөй болгондой кылып тандап алабыз. Биз (3.5.6) туюнтмасынан $y'(x)$ жөнөкөй болуш үчүн $C_1(x),...,C_n(x)$ төмөнкү шартты аткарсын дейли

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0 \qquad (3.5.7_1)$$

(3.5.6)дан $y''(x)$ ти эсептейбиз:

$$y''(x)=C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x)+...+C_n(x)y'_n(x)+$$
$$+C_1'(x)y_1''(x)+C_2(x)y''_2(x)+...+C_n(x)y''_n(x) \qquad (3.5.6_2)$$

Мындан биринчи $n$ кошулуучуну нөлгө барабарлап, дагы бир шарт алабыз:

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0 \qquad (3.5.7_2)$$

Ушул сыяктуу эле ($n$–1) туундусун барабарлап, төмөнкүнү алабыз:

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0 \qquad (3.5.7_{n-1})$$

Анда ($n$-1) туундусу төмөнкү түрдө болот:

$$y^{(n-1)}(x)=C_1(x)y_1^{(n-1)}+C_2(x)y_2^{(n-1)}+...+C_n(x)y_1^{(n-1)} \qquad (3.5.7_{n-1})$$

Мындан $n$ туундусун эсептеп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y^{(n)}(x)=C'_1(x)y_1^{(n-1)}+C'_2(x)y_2^{(n-1)}+...+C'_n(x)y_1^{(n-1)}+C_1(x)y_1^{(n)}+$$
$$+C_2(x)y_2^{(n)}+...+C_n(x)y_1^{(n)} \qquad (3.5.6_n)$$

(3.5.4), (3.5.$6_1$), (3.5.$6_2$),…,(3.5.$6_{n-1}$), (3.5.$6_n$) формулаларын, (3.5.$7_2$),…, (3.5.$7_{n-1}$)лерди эске алып, (3.5.1) теңдемесине коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}+C_n(x)y_1^{(n)}+\ldots+$$
$$+C_n(x)y_n^{(n)}+p_1(x)C_1y_1^{(n-1)}+p_1(x)C_2y_2^{(n-1)}+$$
$$+\ldots+p_1(x)C_ny_n^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)C_1y_1^{(n-1)}+$$
$$+p_{n-1}(x)C_2y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)C_ny_n^{(n-1)}+$$
$$+p_n(x)C_1y_1+p_n(x)C_2y_2+\ldots+p_n(x)C_1y_1=f(x)$$

же

$$C_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_1^{(r-1)}+C_1(y_1^{(n)}+p_1y_1^{(r-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1+p_ny_1)+\ldots$$
$$+C_n(y_n'+p_1y_1^{(r-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1^1+p_ny_n)=f(x)$$

$y_1,\ldots,y_n$ бир тектүү теңдеменин чыгарылышы болгондуктан, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$C'_1y_1^{(n-1)}+\ldots+C'_ny_n^{(n-1)}=f(x) \tag{3.5.7$_n$}$$

Демек, (3.5.7), (3.5.7$_1$),…, (3.5.7$_n$). $C_1'(x),C_2'(x),\ldots,C_n'(x)$ ке карата сызыктуу бир тектүү эмес алгебралык система. Ошондуктан бул система чыгарылышка ээ болуш үчүн булардын коэффициенттеринен түзүлгөн аныктагыч нөлгө барабар эмес болуш керек. Системанын аныктагычы $y_1,y_2,\ldots,y_n$ үчүн Вронскийдин аныктагычы менен дал келет. Демек, ал $y_1,\ldots,y_n$ фундаменталдык система болгондуктан, аныктагыч бир да чекитте нөлгө айланбайт. Демек, чыгарылышы төмөнкүдөй жазылат:

$$C_1(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{i-1}\,0\cdot y_{i+1} & \ldots & y_n \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_{i-1}^{(n-1)} & f(x)y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1,\ldots,y_n)}=\frac{(-1)^{n-i}f(x)Dni(x)}{W(y_1,\ldots,y_n)}$$

Эки жагын интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$C_i(x)=(-1)^{n-i}\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)Dni(s)ds}{W(y_1,\ldots,y_n)(s)}+\gamma_i \tag{3.5.8}$$

(3.5.8) формуласын (3.5.3) формуласына коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}y_i(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)Dni(s)ds}{W(y_1,...,y_n)(s)} \quad (3.5.9)$$

Демек, (3.5.9) бир тектүү эмес (3.5.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы.

*Мисал.*

$$y''+4y=f(x) \quad (3.5.10)$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

(3.5.10) теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y(x)=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x \quad (3.5.12)$$

Белгисиз функцияны аныкташ үчүн ($3.5.7_1$) ($3.5.7_0$) формуласынын негизинде төмөнкүдөй система алабыз

$$\begin{cases} C_1^1(x)\cos 2x+C'_2(x)\sin 2x=0 \\ -2C_1^1(x)\sin 2x+2C_2^1(x)\cos 2x=f(x) \end{cases} \quad (3.5.13)$$

Бул системанын аныктагычы

$$W(\cos 2x,\sin 2x)=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2$$

Демек, Крамердин эрежеси боюнча

$$C_1^1(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ f(x) & 2\cos 2x \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}f(x)\sin 2x$$

$$C_2^1(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\cos 2x & f(x) \end{vmatrix}=+\frac{1}{2}f(x)\cos 2x$$

Бул туюнтмаларды интегралдап, төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} C_1(x)&=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}f(s)\sin 2sds+\gamma_1 \\ C_2(x)&=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}f(s)\cos 2sds+\gamma_2 \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

(3.5.14) формуласын (3.5.12)ге коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$y(x)=\gamma_1\cos 2x+\gamma_2\sin 2x+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(\sin 2x\cos 2s-\cos 2x\sin 2s)f(s)ds=$$

$$=\gamma_1\cos 2x+\gamma_2\sin 2x+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\sin 2(x-s)f(s)ds \qquad (3.5.15)$$

(3.5.15) функциясы (3.5.10) бир тектүү эмес теңдемесинин жалпы чыгарылышы.

## § 3.6 Остроградский-Лиувиллдин формуласынын колдонулушу

Остроградский-Лиувиллдин формуласын экинчи тартиптеги теңдеменин бир чыгарылышы белгилүү болсо, экинчи чыгарылышын табуу үчүн колдонулат. Төмөнкүдөй сызыктуу теңдеме берилсин:

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \qquad (3.6.1)$$

Бул теңдеменин бир чыгарылышы $y_1(x)$ белгилүү болсун. Экинчи чыгарылышы $y_2(x)$ ти табуу үчүн Остраградский-Луивиллдин формуласын колдонобуз:

$$W(x)=C_1e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds} \qquad (3.6.2)$$

же болбосо

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=C_1e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds}$$

Мындан

$$y_1y'_2-y_2y'_2=C_1e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds}+C_2$$

Акыркы теңдеменин эки жагын $y_1^2$ ка бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{y_1y_2^1-y_2y_1^1}{y_1^2}=\frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds} \qquad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{y'_2y_1-y_2y'_1}{y^2_1}$$

экендигин эске алып, эки жагын интегралдап, акыркы теңдемеден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{y_2}{y_1} = C_1 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p_1(\tau)d\tau ds} + C_2$$

Мындан

$$y_2 = C_2 y_1(x) + C_1 y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p_1(\tau)ds} ds$$

Бул болсо берилген (3.6.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы. Демек, экинчи тартиптеги теңдеменин бир чыгарылышы белгилүү болсо, экинчи чыгарылышын интегралдап табууга болот.

*Мисал:*

$$y'' - \frac{y'}{2x} - \frac{1}{x^2} y = 0$$

теңдемесинин чыгарылышын тапкыла. Бул теңдеменин бир чыгарылышы

$$y_1(x) = x^2$$

экендигин көрүүгө болот. Анда экинчи чыгарылышын жогорку формула аркылуу табабыз:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p_1(\tau)d\tau} ds = x^2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s^4} e^{\int_{x_0}^{s} \frac{1}{2\tau} d\tau} ds = x^2 \int_{1}^{x} \frac{1}{s^4} s^{\frac{1}{2}} ds =$$

$$= x^2 \int_{1}^{x} s^{-\frac{7}{2}} ds = -\frac{5}{2} x^2 \left( s^{-\frac{7}{2}+1} s \right) \Big|_1^x = -\frac{2}{5} x^2 (x^{-\frac{5}{2}} - 1) = -\frac{2}{5} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} x^2$$

Демек, жалпы чыгарылышы:

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$$

Текшерүү:

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}, \qquad y'_2 = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}, \quad y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$$

ордуна койсок,

$$\frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{2}} - x^{-\frac{5}{2}} = 0$$

Демек, теңдемени канааттандырат.

## § 3.7. Экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселе

Төмөнкүдөй сызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени карайлы.

$$l(y) = p(x)y'' + q(x)y' + g(x)y = 0, \quad 0 < x < 1 \qquad (3.7.1)$$

жана бул теңдеме үчүн төмөнкүдөй чектик маселени коелу

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0 \qquad (3.7.2)$$

(3.7.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышын таап, (3.7.2) шартына коюп, андан $C^1$ жана $C^2$ турактуу чондуктарын аныктайбыз. (3.7.1), (3.7.2) чектик маселеси бардык эле убакта чыгарылышка ээ боло бербейт. Экинчи тартипте төмөнкүдөй бир тектүү эмес теңдемени карайлы

$$l(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (3.7.3)$$

*Аныктама.* Эгерде $G(x,s)$, $0 < x < 1$, $0 < s < 1$ функциясы төмөнкүдөй шарттарды канааттандырса:

1) $G(x, s)$ $s$тин ар кандай маанисинде $x$тен функция катары $x \neq s$ чекиттеринде (3.7.1) теңдемесин канааттандырса;

2) $x$=0 жана $x$=1 болгондо, (3.7.2) шартын аткарса;

3) $G(s+0,s) = G(s-0,s)$;

4) $G_x'(s+0,s) = G_x'(s-0,s) + \dfrac{1}{p(s)}$; анда ал $G(x, s)$ функциясы (3.7.3), (3.7.2) маселеси үчүн Гриндин функциясы деп аталат. Эгерде Гриндин функциясы жашаса, анда (3.7.2), (3.7.3) чектик маселесинин чыгарылышы төмөнкү түрдө аныкталат:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)ds \qquad (3.7.4)$$

Д а л и л д ө ө. Далилдөө үчүн (3.7.4)тү төмөнкүчө жазабыз:

$$y(x) = \int_0^x G(x,s)f(s)ds + \int_x^1 G(x,s)f(s)ds \qquad (3.7.5)$$

Мындан биринчи жана экинчи туундуларын эсептейбиз:

$$y'(x) = G(x,x-0)f(x-0) + \int_0^x G_x(x,s)f(s)ds - G(x,x+0)f(x+0) +$$

$$+\int_x^1 G_x(x,s)f(s)ds = f(x)(G(x,x-0)-G(x,x+0)+\int_0^x G_x(x,s)f(s)ds+$$

$$+\int_x^1 G_x(x,s)f(s)ds = \int_0^x G_x(x,s)f(s)ds + \int_x^1 G_x(x,s)f(s)ds$$

Биз мында $f(x)$ жана $G(x,s)$ функцияларынын үзгүлтүксүздүгүн колдондук. Мындан экинчи туундусун эсептейбиз:

$$y''(x) = G_x(x,x-0)f(x-0) - G_x(x,x+0)f(x+0) + \int_0^x G_{xx}(x,s)f(s)ds +$$

$$+\int_x^1 G_{xx}(x,s)f(s)ds = f(x)\{G_x(x,x-0-G_x(x,x+0)\}+$$

$$+\int_0^x G_{xx}(x,s)f(s)ds + \int_x^1 G_{xx}(x,s)f(s)ds.$$

$$L\left(\int_0^1 G(x,s)f(s)ds\right) = f(x)p(x)\{G_x(x,x-0)-G_x(x,x+0)\} \equiv f(x)$$

Гриндин функциясын тургузуу үчүн: $y_1(x)$ функциясы (3.7.1)дин чыгарылышы жана (3.7.2) шартынын биринчисин канааттандырган, ал эми $y_2(x)$ функциясы (3.7.1)дин чыгарылышы (3.7.2) шартынын экинчисин канааттандырган чыгарылыштар белгилүү болсун дейли. Бул учурда $G(x, s)$ функциясын төмөнкү түрдө издейбиз.

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & 0 \le x \le s. \\ b(s)y_2(x) & s \le x \le 1 \end{cases} \qquad (3.7.7)$$

Мында $s$ каалагандай токтотулган чекит. Белгисиз функциялар $a(s)$ жана $b(s)$ти аныкташ үчүн Гриндин функциясынын (3.7.3) жана (3.7.4) касиеттерин колдонобуз.

$$\begin{cases} b(s)y_2(s) - a(s)y_1(s) = 0 \\ b(s)y_2'(s) - a(s)y_1'(s) = \dfrac{1}{p(s)}; \end{cases} \qquad (3.7.8)$$

Бул системанын аныктагычы төмөнкүгө барабар:

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & \\ y_2'-y_1' & \end{vmatrix}=-y_1'y_2+y_1y_2'=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=w(s)\neq 0$$

Анткени $y_1$ жана $y_2$ чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес. Крамердин эрежеси боюнча

$$b(s)=\begin{vmatrix} 0 & -y_1 \\ p^{-1}(s) & -y'_1 \end{vmatrix} W^{-1}(s)=\frac{y_1(s)}{p(s)W(s)};$$

(3.7.8)

$$a(s)=\begin{vmatrix} y_2-0 & \\ y'_2\, p^{-1}(s) & \end{vmatrix} W^{-1}(s)=\frac{y_2(s)}{p(s)W(s)}.$$

Табылган маанилерди (3.7.7)ге коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$G((x,s)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)W(s)}; & 0\le x\le s \\ \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{p(s)W(s)}; & s\le x\le 1 \end{cases} \tag{3.7.9}$$

*Мисал.* Төмөнкү чектик маселе үчүн Гриндин функциясын түзгүлө:

$$y''=f(x),\qquad y(0)=0,\qquad y(1)=0$$

Бул учурда $y_1(x)=x,\ y_2(x)=1-x$ деп алабыз. Эки функция сызыктуу көз каранды эмес. Анткени:

$$W(x,1-x)=\begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=x-1+x=-1\neq 0.$$

(3.7.9) формуласын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$G(x,s)=\begin{cases} -x(1-s), & 0\le x\le s, \\ -(1-x)s, & s\le x\le 1. \end{cases} \tag{3.7.11}$$

Демек, (3.7.10) маселесинин чыгарылышы төмөнкүдөй жазылат:

$$y(x)=\int_0^x (x-1)sf(s)ds+\int_x^1 x(s-1)f(s)ds \tag{3.7.12}$$

Чындыгында

$$y'(x) = (x-1)xf(x) - x(x-1)f(x) + \int_0^x sf(s)ds + \int_x^1 (s-1)f(s)ds$$

Мындан дагы бир жолу туундулап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'(x) = xf(x) - (x-1)f(x) = f(x).$$

Гриндин функциясы аргументтери боюнча симметриялуу функция болот, б.а. төмөнкү шарт аткарылат:

$$G(x,s,) = G(s,x) \tag{3.7.14}$$

Чындыгында

$$G(s,x) = \left.\begin{cases} -s(1-x), & o \le s \le x \\ -x(1-s), & x \le s \le 1 \end{cases}\right\} = G(x,s)$$

Эгерде $G\ (x,\ s)$ функциясын $s$тен функция катары карасак, анда $s=x$те төмөнкүдөй шарттар аткарылат:

$$\begin{cases} G(x,x+0) - G(x,x-0) = 0; \\ G_s(x,x+0) - G_s(x,x-0) = -1; \end{cases}$$

Чындыгында (3.7.11)ден төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$G(x,x+0) = -x(1-x) - (-(1-x) = 0$$

$$G_s(x,x+0) = -x, G_s(x,x-0) = -(1-x)$$

$$G_x(x,x+0) = -(1-x), G_x(x,x-0) = x$$

Мындан

$$G_x(x,x-0) - G_x(x,x+0) = x + (1-x) = 1.$$

## IV ГЛАВА

## ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР

### §4.1. Бир тектүү туруктуу коэффициенттүү сызыктуу жогорку тартиптеги теңдемелер

Аталган теңдемелер жогорку тартиптеги теңдеменин маанилүү классына кирет. Анткени бул түрдөгү теңдемеге физикалык жана механикалык кубулуштарды түшүндүргөн көп маселелер алынып келинет.

Бир тектүү теңдеме төмөнкү түрдө жазылат:

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \qquad (4.1.1)$$

Мында $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}. b_n$ туруктуу берилген чыныгы сандар. Эгерде $b_0 \neq 0$ болсо (4.1.1) $n$-тартиптеги теңдеме. Демек $b_0$го бөлүп, бардык убакта $n$-тартиптеги теңдемени төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (4.1.1)$$
$$a_i = \frac{b_i}{b_0}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(4.1.1) теңдемесинин чыгарылышын Эйлердин методу боюнча төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y = e^{\lambda x} \qquad (4.1.2)$$

Мында $\lambda$ азырынча белгисиз сан. (4.1.2) функциясынын туундуларын эсептейбиз

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \qquad (4.1.3)$$

(4.1.2), (4.1.3) функцияларын (4.1.1)ге коюп, жалпы көбөйтүүчүсүн чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0 \qquad (4.1.4)$$

(4.1.4)түн сол жагындагы биринчи көбөйтүндү $e^{\lambda x}\neq 0$,

$-\infty < x < \infty$ болгондо. Демек, (4.1.2) функциясы (4.1.1) чыгарылышы болуш үчүн λ саны төмөнкү алгебралык теңдеменин чыгарылышы болуу керек:

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4.1.5)$$

*n*-даражадагы алгебралык теңдеме (4.1.1) дифференциалдык теңдемесинин мүнөздөөчү теңдемеси деп аталат. Демек, (4.1.1) турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын табуу алгебралык *n*-даражадагы теңдеменин чыгарылышын табууга алынып келинди. Алгебранын негизги теоремасы боюнча (4.1.5) теңдемеси n чыгарылышка ээ болот. Бул чыгарылыштарды $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ деп белгилесек, аларга (4.1.2) формуласы аркылуу $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштары туура келет. Бул чыгарылыштар сызыктуу көз каранды болобу жокпу деген суроого жооп берүү үчүн төмөнкүдөй учурларды карайбыз:

*1-учур.* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандары чыныгы жана ар түрдүү болсун. б.а. $\lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k$ болгондо. Бул учурда (4.1.2) формуласы боюнча (4.1.1) теңдемесинин төмөнкүдөй *n* чыгарылышы туура келет.

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x} \qquad (4.1.6)$$

Бул чыгарылыштардын сызыктуу көз каранды эмес экендигин далилдейбиз. (4.1.6) функцияларынан Вронскийдин аныктагычын түзөбүз.

$$W\left[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, \lambda_2 e^{\lambda_2 x}, \ldots, \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^{\,n-1} e^{\lambda_1 x}, \lambda_2^{\,n-1} e^{\lambda_2 x}, \ldots, \lambda_n^{\,n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_n)} \begin{vmatrix} 11\ldots1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \\ \lambda_1^{\,n-1}, \lambda_2^{\,n-1}, \ldots, \lambda_n^{\,n-1} \end{vmatrix} \qquad (4.1.7)$$

Мындан $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_n)x} \neq 0$ (4.1.7)деги экинчи көбөйтүндүсүн изилдейбиз. Ал Вандермонддун аныктагычы деп аталат жана анын чоңдугу төмөнкүгө барабар:

$$\Delta(\lambda_1,...,\lambda_n)=(\lambda_n-\lambda_{n-1})(\lambda_n-\lambda_{n-2})...(\lambda_n-\lambda_1)$$
$$\cdot(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})...(\lambda_{n-1}-\lambda_1) \tag{4.1.8}$$
$$-----------------$$
$$(\lambda_2-\lambda_1)$$

(4.1.8) туюнтмасынан $\lambda_k \neq \lambda_1$ болгондуктан, $\Delta(\lambda_1,...,\lambda_n)\neq 0$ келип чыгат. Демек, биз далилдеген теорема боюнча $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x}$ функциялары сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштар жана анын саны теңдеменин тартибине барабар болот. Анда (4.1.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+...+C_ne^{\lambda_n x} \tag{4.1.9}$$

формуласы аркылуу берилет. Мында $C_1,C_2,...,C_n$ – каалагандай турактуу чоңдуктар.

*2-учур.* Мүнөздөөчү теңдеменин тамырлары чыныгы, бирок кээ бир тамырлары эселүү болсун. Мисалы, $\lambda_1$ тамырларынын эсеси $m_1$ ге барабар болсун, $m_1\geq 2$. Бул учурда $\lambda_1$ тамырына дифференциалдык теңдеменин $e^{\lambda_1 x}$ деген бир эле чыгарылышы тура келет, демек, $m_i-1$ чыгарылышы жетпейт.

(4.1.1) теңдемесинин сол жагын карайбыз жана аны $L(y)$ аркылуу белгилейбиз.

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y+a_ny \tag{4.1.10}$$

$L(y)$: $n$-тартипке чейинки үзгүлтүксүз туундуга ээ болгон ар бир функцияга үзгүлтүксүз функция туура келтирген оператор:

Төмөнкүдөй функция карайбыз:

$$e^{\alpha x}x^m \tag{4.1.11}$$

Бул функциядагы $L$ операторунун маанисин карайбыз. Бул эки функциянын көбөйтүндүсү үчүн Лейбництин формуласын колдонобуз:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C^1{}_nuv'^{(n-1)}+C_n{}^2uv''^{(n-2)}+...+C_n{}^ku^{(n-k)}v^{(k)}+...+C_n{}^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)};$$

$$(uv)^{(n-1)}=u^{(n-1)}v+(n-1)u^{(n-2)}v'+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}u^{(n-3)}v''+..+(n-1)u'v^{(n-2)}+uv^{(n-1)}$$
$$-----------------------$$
$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$(uv)'=u'v+uv',$$
$$uv=uv.$$

Биринчини 1ге, экинчини $a_1$ге …, акыркыны $a_n$ге көбөйтүп жана кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L(uv) = vL(u) + \frac{v'}{1!}L_1(u) + \frac{v''}{2!}L_2(u) + \ldots + \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)}L_{n-1}(u) + \frac{v^{(n)}}{n!}L_n(u) \quad (4.1.12)$$

Бул жерде төмөнкүдөй белгилөө кийрилди:

$$\begin{cases} L(u) = u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + a_2u^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}u' + a_nu, \\ L_1(u) = nu^{(n-1)} + (n-1)a_1u^{(n-2)} + (n-2)a_2u^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}u; \\ L_2(u) = n(n-1)u^{(n-2)} + (n-1)(n-2)a_1u^{(n-3)} + (n-2)(n-3)u^{(n-3)} + \ldots + 2\cdot 1a_{n-2}u, \\ \text{-----------------------------------------} \\ L_{n-1}(u) = n(n-1)\ldots\cdot 2u' + (n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1a_1u, \\ \text{-------------------------} \\ L_n(u) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot u \end{cases} \quad (4.1.13)$$

Мында $L_k(u),\ \ k = 1, 2, \ldots, n$ операторлору $L(u)$ операторлорунан көп мүчөнү дифференцирлөө эрежесине окшош түрдө түзүлгөн, бул жерде көрсөткүчтүн ролун туундунун тартиби ойнойт. (4.1.12) формуласы каалагандай сызыктуу дифференциалдык оператор үчүн туура болот. Эгерде жеке учурда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициенттери турактуу сандар болсо, анда ар бир $L_k(u)$ операторуна $F_k(a)$ мүнөздөөчү теңдемесинин $k$ туундусу экендигин жеңил эле көрүүгө болот.

$$F_k(\alpha) = F^{(k)}(\alpha) \quad (4.1.14)$$

Эми $u = e^{\lambda x}, v = x^m$ болгондо, $L$ операторунун маанисин эсептейбиз, мында $m$ бүтүн оң сан. Бул функцияларды (4.1.12) формуласына коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L\left[e^{\lambda x}\cdot x^m\right] = x^mL(e^{\lambda x}) + \frac{m}{1!}x^{m-1}L_1\left(e^{\lambda x}\right) + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}L_2(e^{\lambda x}) +$$
$$+ \ldots + mxL_{m-1}(e^{\lambda x}) + L_m(e^{\lambda x}),$$

же (4.1.4) жана (4.1.14) формулаларын колдонсок, анда:

$$L\left(x^me^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x}\left\{x^mF(\lambda) + \frac{m}{1!}x^{m-1}F'(\lambda) + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}F''(\lambda) + \ldots + \right.$$
$$\left. + mxF^{(m-1)}(\lambda) + F^{(m)}(\lambda)\right\} \quad (4.1.15)$$

$\lambda_1$ саны (4.1.4) мүнөздөөчү теңдемесинин $m_1$ эселүү тамыры болсун дейли. Бул учурда төмөнкүдөй катыштар орун алат:

$$F(\lambda_1)=0, \qquad F(\lambda_1)=0,...,F^{(m-1)}(\lambda_1)=0, \quad F^{(m)}(\lambda_1)\neq 0$$

Эгерде (4.1.15) туюнтмасындагы $m$ даража көрсөткүчүн $m_1$ санынан кичине кылып алсак, анда $\lambda=\lambda_1$ болгондо, (4.1.15) туюнтмасынын оң жагындагы кашаанын ичи нөлгө айланат. Демек, биз $\lambda_1$ тамырына туура келген (4.1.1) дифференциалдык теңдемесин $m_1$ жеке чыгарылышын алабыз:

$$xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x},...,x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \tag{4.1.16}$$

Ушуга окшош эле эгерде $\lambda_2$, $m_2$ эселүү,..., $\lambda_p$, $m_p$ эселүү. $m_1\geq 1$ жана $m_1+m_2+...+m_p=n$ болсо, бардык $\lambda_i$ лер ар түрдүү болсо, анда буларга төмөнкүдөй жеке чыгарылыштар туура келишет:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x},...,x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ e^{\lambda_3 x}, xe^{\lambda_3 x},...,x^{m_3-1}e^{\lambda_3 x} \\ ------------ \\ e^{\lambda_p x}, xe^{\lambda_p x},...,x^{m_p-1}e^{\lambda_p x} \end{array}\right\} \tag{1.4.16'}$$

(4.1.15) (4.1.16) чыгарылыштардын жыйындысы эселүү тамыр болгон учурдагы (4.1.1) дифференциалдык тещдемесинин $n$ жеке чыгарылышын берет.

Бул функциялар чыгарылыштардын фундаменталдык системасын түзө тургандыгын далилдейбиз. Ал үчүн сызыктуу көз каранды эмес экендигин көрсөтөбүз. Тескерисинче, сызыктуу көз каранды болсун дейли.

$$\sum_{i=1}^{p}(A_0^{(i)}+A_1^{(i)}x+...+A_{m_{i-1}}^{(i)}x^{m_{i-1}})e^{\lambda_i x}\equiv\sum_{i=1}^{p}P_i(x)e^{\lambda_i x}=0 \tag{4.1.17}$$

Сызыктуу көз карандылыктын аныктамасы боюнча эң жок дегенде $P_i(x)$ көп мүчөсүнүн бир коэффициенти нөлгө барабар эмес. Жалпы учурду бузбастан ал көп мүчө $P_1(x)$ болсун дейли. (4.1.17) катышын эки жагын $e^{\lambda_1 x}$ ке бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$P_1(x)+\sum_{i=2}^{p}P_i(x)e^{(\lambda_i-\lambda_1)x}=0$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын $m_1$ жолу дифференциалдап, төмөнкүдөй теңдештикке ээ болобуз:

$$\sum_{i=2}^{p} Q_i(x)e^{(\lambda_i-\lambda_1)x} = 0 \qquad (4.1.17)$$

$Q_p(x)$ көп мүчөсү теңдеш нөлгө барабар эмес. (4.1.17) теңдештиги $p$–1 кошулуучуну кармайт. Ушул процессти улантып, биз акырында төмөнкүдөй теңдештикке келебиз:

$$R_p(x)e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})x} = 0 \qquad (4.1.17')$$

Бирок (4.1.17') теңдештиги мүмкүн эмес, анткени $e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})x} \neq 0$ ал эми $R_p(x)$ көп мүчөсү сыяктуу эле $p$– даражада болуп, анын бир коэффициенти да нөлгө барабар эмес. Демек ал теңдеш нөлгө барабар эмес. Демек (4.1.16), (4.1.16') чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес. Бул учурда (4.1.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} G_i(x)e^{\lambda_i x} \qquad (4.1.18)$$

Мында $G_i(x)$; $(m_i - 1)$ – даражадагы эркибизче алынган коэффициенттүү көп мүчөлөр. (4.1.18) туюнтмасындагы эркин турактуу чоңдуктардын саны

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

б.а. дифференциалдык теңдеменин тартибине барабар.

*3-учур.* (4.1.5) мүнөздөөчү теңдеменин тамырлары комплекстүү жөнөкөй болсун дейли. Бул учурда дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын табуудан мурда төмөнкүдөй лемма далилдейбиз:

*Лемма.* Эгерде $u(x)+iv(x)$ комплекстүү функциясы (4.1.1) дифференциалдык теңдемесинин чыгарылышы болсо, анда $u$ $(x)$ жана $v$ $(x)$ функциялары өз алдынча (4.1.1) теңдемесинин чыгарылышы болот.

Д а л и л д ө ө: Лемманын шарты боюнча $L(u(x)+iv(x)) \equiv 0$ теңдештиги орун алат. Акыркы теңдештикти $L$ операторунун касиетин колдонуп, төмөнкү түрдө жазсак болот:

$$L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0$$

Мындан комплекстүү функциянын касиети боюнча $L(u(x)) \equiv 0, L(v(x)) \equiv 0$ теңдештиктерин алабыз.

Бул болсо $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары (4.1.1) теңдемесин канааттандырат дегенди билдирет. Лемма далилденди.

$\lambda = p+iq, \quad q \neq 0$ (4.1.5) теңдемесинин тамыры болсун, (4.1.5) теңдемесинин коэффициенттери чыныгы сандар болгондуктан, $\lambda = p-iq$ саны дагы (4.1.5) теңдемесин канааттандырат. Демек, комплекстүү тамырлар түгөйлөрү менен катышат. Бул тамырга төмөнкүдөй чыгарылыштар туура келет.

$$y_1(x) = e^{(p+iq)x}, \; y_2(x) = e^{(p-iq)x} \tag{4.1.19}$$

Көрсөткүчтүү функциянын касиетин жана Эйлердин формуласын колдонуп, (4.1.19) чыгарылыштарын төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$y_1(x) = e^{px} \cdot e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i\sin qx) = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx$$

$$y_2(x) = e^{px} \cdot e^{-iqx} = e^{px}(\cos qx - i\sin qx) = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx$$

Мындан жогорку лемманы колдонуп, төмөнкүдөй чыныгы чыгарылыштарды бөлүп алабыз:

$$y_1^{(1)}(x) = e^{px}\cos qx, \quad y_1^{(2)}(x) = e^{px}\sin qx,$$

$$y_2^{(2)}(x) = e^{px}\cos qx, \quad y_2^{(2)}(x) = -e^{px}\sin qx,$$

Демек, эки комплекстүү тамырга дифференциалдык теңдеменин төрт чыныгы чыгарылышы туура келет. Бирок булардын ичинен экөө гана сызыктуу көз каранды эмес, ал эми түйүндөш тамырга туура келген чыгарылышы жаңы чыгарылышты пайда кылбайт. Бул учурда да эки комплекстүү тамырга эки чыныгы чыгарылыш туура келет:

$$y_1^{(1)}(x) = e^{px}\cos qx, \quad y_1^{(2)}(x) = e^{px}\sin qx \tag{4.1.20}$$

Булар сызыктуу көз каранды эмес экендигин далилдейбиз:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{p}\cos qx & e^{px}\sin qx \\ pe^{px}\cos qx - e^{px}q\sin qx pe^{px}\sin qx + qe^{px}\cos qx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2px}(p\cos qx\sin qx + q\cos^2 qx -$$

$$-p\cos qx\sin qx + q\sin^2 qx) = e^{2px}q;$$

Мында $q \neq 0, \quad e^{2px} \neq 0$ болгондуктан,

$$W(y_1, y_2) \neq 0$$

(4.1.20) чыгарылыштары § 3.4төгү теореманын негизинде сызыктуу көз каранды эмес.

Эгерде (4.1.5) мүнөздөөчү теңдемесинин $m$ тамыры комплекстүү болсо, анда ага түйүндөш $m$ тамыры да болот. Демек $2m$ сандагы комплекстүү тамыры болот. Буларды

$$\lambda_k = p_k + iq_k, \quad \overline{\lambda}_k = p_k - iq_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

десек, анда буларга жогорудагыдай (4.1.1) теңдемесинин чыгарылышы туура келет.

$$y_k^{(1)} = e^{p_k x} \cos q_k x, \qquad y_k^{(2)} = e^{p_k x} \sin q_k x, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \quad (4.1.21)$$

Калган $n$-$2m$ тамыры чыныгы сан болсун дейли. Бул учурда (4.1.1) теңдемесинин чыгарылышы төмөнкүдөй жазылат:

$$y(x) = \sum_{k+1}^{m} (C_k^{(1)} e^{p_k x} \cos q_k x + C_k^{(2)} e^{p_k x} \sin q_k x) + \sum_{k=1}^{n-2m} C_k e^{\lambda_k x} \quad (4.1.22)$$

Мында $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}, \ldots, C_k$ эркибизче алынган турактуу сандар. Турактуу сандардын саны $n$ ге теңдеменин тартибине барабар.

*4-учур.* (4.1.5) теңдемесинин тамырлары комплекстүү эселүү болсун. $\lambda_1 = p_1 + iq_1$ саны $m_1$ эселүү тамыры болсун. Анда $\lambda_2 = p_1 - iq_1$ саны дагы $m_1$ эселүү тамыры болот. Бул тамырларга (4.1.1) теңдемесинин төмөнкүдөй чыныгы чыгарылыштары туура келет:

$$\begin{gathered} e^{p_1 x} \cos q_1 x, x e^{p_1 x} \cos q_1 x, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{p_1 x} \cos q_1 x, \\ e^{p_1 x} \sin q_1 x, x e^{p_1 x} \sin q_1 x, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{p_1 x} \sin q_1 x, \end{gathered} \quad (4.1.23)$$

$\lambda_k = p_h + iq_k$ саны $m_k$ эселүү тамыр болсун дейли. Бул учурда $\overline{\lambda}_k = p_k - iq_k$ саны дагы $m_k$ эселүү тамыр болот. Анда (4.1.1) теңдемесинин чыгарылышы да төмөнкү түрдө жазылат:

$$\begin{gathered} e^{p_k x} \cos q_k x, x e^{p_k x} \cos q_k x, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{p_k x} \cos q_k x, \\ e^{p_k x} \sin q_k x, x e^{p_k x} \sin q_k x, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{p_k x} \sin q_k x, \end{gathered} \quad (4.1.24)$$

Төмөнкү барабардык орун алат: $2m_1 + 2m_1 + \ldots + 2m_k = n$

Бул учурда (4.1.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$\begin{aligned} y(x) = e^{p_1 x} \cos q_1 x (a_1^{(1)} + a_2^{(1)} x + \ldots + a_{m1}^{(1)} x^{m_1 - 1}) + \ldots + \\ + e^{p_1 x} \sin q_1 x (b_1^{(1)} + b_2^{(1)} x + \ldots + b_{m_1}^{(1)} x^{m_1 - 1}) + \ldots + \end{aligned}$$

$$+e^{p_1x}\cos q_h x(a_1^{(k)}+a_2^{(k)}x+...+a_{mk}^{(k)}x^{m_k-1})+$$
$$+e^{p_1x}\sin q_k x(b_1^{(k)}+b_2^{(k)}x+...+b_{mk}^{(k)}x^{m_k-1}) \tag{4.1.25}$$

Мында

$$a_1^{(1)},...,a_{m1}^{(1)},b_1^{(1)},...,b_{m1}^{(1)},...,a_1^{(k)},...,a_{mk}^{(k)},b_1^{(k)},...,b_{m1}^{(k)},....,b_{mk}$$

эркибизче алынган турактуу чоңдуктар.

Төмөнкүдөй мисалдарды карайбыз:

**1-мисал.** $y''+4y'+3y=0$ Бул теңдеменин мүнөздөөчү теңдемеси төмөнкү түрдө болот:

$\lambda^2+4\lambda+3=0.$

Мындан $\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2};\quad \lambda_1=-1;\quad \lambda_2=-3;$

Демек, мүнөздөөчү теңдеменин тамырлары бири-бирине барабар эмес. Тамырларга берилген теңдеменин төмөнкүдөй эки чыгарылышы туура келет:

$$y_1(x)=e^{-x},\qquad y_2(x)=e^{-3x}$$

Бул учурда дифференциалдык теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$$

**2-мисал.**

$$4y''+4y'+y=0$$

Берилген теңдеменин мүнөздөөчү теңдемеси төмөнкү түрдө болот:

$$4\lambda^2+4\lambda+1=0$$

Бул теңдеменин чыгарылышы

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2},$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

Демек, эселүү тамыр эсеси 2ге барабар. Бул тамырга берилген теңдеменин 2-учурга ылайык төмөнкүдөй эки чыгарылышы туура келет:

$$y_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x},\qquad y_2(x)=xe^{-\frac{1}{2}x};$$

Анда жалпы чыгарылыш төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2 x),$$

Мында $C_1$, $C_2$ эркибизче алынган турактуу чоңдуктар

**3-мисал.**

$$y'' + 4y = 0$$

бул теңдеменин мүнөздөөчү теңдемеси

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Акыркы теңдеменин тамырлары төмөнкүдөй комплекстүү сандар:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Демек, бул эки түйүндөш тамырга берилген дифференциалдык тещдеменин төмөнкүдөй эки чыныгы чыгарылышы туура келет:

$$y_1(x) = \cos 2x,\ y_2(x) = \sin 2x$$

Бул учурда дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

**4-мисал.**

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

Бул теңдемеге төмөнкүдөй мүнөздөөчү теңдеме туура келет:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

Демек, мындан

$$\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i,\ \lambda_{3,4} = -i$$

$i$ жана ага түйүндөш $-i$ теңдеменин эки эселүү тамыры. Бул тамырларга берилген дифференциалдык теңдеменин төмөнкүдөй чыгарылыштары туура келет:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = x\cos x, \quad y_3(x) = \sin x, \quad y_4(x) = x\sin x$$

Берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$$

*Мисалдар:*

Төмөнкү теңдемелердин жалпы чыгарылышын тапкыла.

$$y^{IV} - 2y'' = 0$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$y^{IV} + 4y = 0$$

$$2y'' + y' + y = 0$$

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$$

## § 4.2. Оң жагы квази көп мүчө болгон бир тектүү эмес турактуу коэффициенттүү *n*-тартиптеги теңдеме

Төмөнкүдөй бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемени карайбыз:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \quad (4.2.1)$$

Мында $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – турактуу чыныгы сандар, $f(x)$ $(a, b)$ интервалында үзгүлтүксүз функция.

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4.2.2)$$

бир тектүү теңдеменин мүнөздөөчү теңдемеси.

Бул параграфта $f(x)$ функциясы төмөнкүдөй болсун дейли:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$$

Мында $P_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $a$– турактуу сан.

*1-учур*: *a* саны (4.2.2) теңдемесинин тамыры болбосун десек, бул учурда

$$L(y) = e^{\alpha x} P_m(x) \quad (4.2.4)$$

теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$Y = e^{\alpha x} Q_m(x) \quad (4.2.5)$$

Мында

$$Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \ldots + q_1 x^m + q_0,$$

$q_m, q_{m-1}, \ldots, q_1, q_0$ – белгисиз коэффициенттер. Бул коэффициенттерди (4.2.5), (4.2.4) бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышы болгондой кылып аныктайбыз.

Лейбництин формуласы боюнча:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}v + (n-1)u^{(n-2)}v' + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}u^{(n-3)}v'' + \ldots + (n-1)u'v^{(n-2)} + uv^{(n-1)}$$

---

$$(uv)^{(k)} = u^{(k)}v + ku^{(k-1)}v' + \frac{k(k-1)}{2!}u^{(k-2)}v'' + \ldots + ku'v^{(k-1)} + uv^{(k)}$$

---

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (uv) = uv.$$

Булардын биринчисин 1ге, экинчисин $a_1$ге,…, $n$–1чисин $a_{n-1}$$n$син $a_n$ге көбөйтүп мүчөлөп, кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L(uv) = vL(u) + v'L_1(u) + \frac{v''}{2!}L_2(u) + \ldots + \frac{v^{(k)}}{k!}L_k(u) + \ldots + \frac{v^{(n)}}{n!}L_n(u), \quad (4.2.6)$$

мында

$$L(u) = u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + a_2u^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}u' + a_nu,$$

$$L_1(u) = nu^{(n-1)} + a_2(n-2)u^{(n-2)} + a_2(n-2)u^{(n-3)} + \ldots + 2a_{n-2}u' + a_{n-1}u,$$

---

$$L_k(u) = n(n-1)\ldots.(n-k+1)u^{(n-k)} + a_1(n-1)(n-2)\ldots(n-1-k+1)u^{(n-k-1)} + \ldots + a_{n-k}k!u,$$

$$L_{n-1}(u) = n(n-1)\ldots(n-(n-2))u' + a_1(n-1)!u,$$

$$L_n(u) = n!u$$

$u$ жана $v$ функциялары үчүн төмөнкү функцияларды коебуз:

$$u = e^{\alpha x}, \qquad v = x^m \quad (4.2.7)$$

Бул функцияларды (4.2.6) формуласына койсок, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$L\left(e^{\alpha x}x^m\right) = \left\{x^mF(\alpha) + (x^m)'F'(\alpha) + \frac{(x^m)''}{2!}F''(\alpha) + \ldots + \frac{(x^m)^{(k)}}{k!}F'(\alpha) + \ldots + \frac{(x^m)^{(m)}}{m!}F^{(n)}(\alpha)\right\}e^{\alpha x}$$

$$L\left(e^{\alpha x}x^{m-1}\right) = \left\{x^{m-1}F(\alpha) + (x^{m-1})F(\alpha) + \frac{(x^{m-1})''}{2!}F'(\alpha) + \ldots + \frac{(x^{m-1})^{(m-1)}}{(m-1)!}F^{(m-1)}(\alpha)\right\}e^{\alpha x}$$

---

$$L(e^{\alpha x}x) = \{xF(\alpha + F'(\alpha)\}e^{\alpha x},$$

$$L(e^{\alpha x}) = F(\alpha)e^{\alpha x}.$$

–

Бул туюнтмалардын биринчисин $q_m$ге, экинчиси $q_{m-1},\dots,q_1$ ге, көбөйтүп, кошуп, (4.2.4) теңдемесинен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$q_m\left\{x^m F(\alpha)+(x^m)'F'(\alpha)+\frac{(x^m)''}{2!}F'(\alpha)+\dots+\frac{(x^m)^m}{m}F^{(m)}(\alpha)\right\}+$$
$$q_{m-1}\left\{x^{m-1}F(\alpha)+(x^{m-1})'F'(\alpha)+\frac{(x^{m-1})''}{2!}F''(\alpha)+\dots+\frac{(x^{m-1})^{m-1}}{(m-1)!}F^{(m-1)}(\alpha)\right\}+$$
$$+\dots+q_1\left\{xF(\alpha)+F'(\alpha)e^{\alpha x}\right\}+q_0F(\alpha)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x\ +b_0$$

Эки жагынан $x$тин бирдей даражасындагы коэффициенттерди барабарлап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} q_mF(\alpha)=b_m, \\ mq_mF'(\alpha)+q_{m-1}F(\alpha)=b_{m-1}, \\ m(m-1)q_mF''(\alpha)+(m-1)F'(\alpha)q_{m-1}+q_{m-2}F(\alpha)=b_{m-2}, \\ ------------------------ \\ q_mF^{(m)}(\alpha)+q_{m-1}F^{(m-1)}(\alpha)+\dots+q_1F'(\alpha)+q_0F(\alpha)=b_0 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

(4.2.8) $q_m,q_{m-1},\dots,q_1,q_0$ белгисиздерге карата сызыктуу алгебралык система. Бул системанын аныктагычы төмөнкүгө барабар:

$$\Delta=\begin{vmatrix} F(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ mF(\alpha) & F(\alpha) & 0 \ \dots & 0 \\ ----- & ----- & ----- & \\ F^{(m)}(\alpha) & F^{(m-1)}(\alpha) & F(\alpha) & \end{vmatrix}=(F(\alpha))^{m+1}$$

Биздин аныктоо боюнча $F(\alpha)\neq 0$. Демек, $\Delta\neq 0$. Ошондуктан (4.2.8) системасы жалгыз чыгарылышка ээ болот, б.а. $q_m,q_{m-1},\dots,q_1,q_0$ белгисиздер бир маанилүү болуп аныкталат.

*2-учур.* *a* саны (4.2.2) мүнөздөөчү теңдемесинин *k* эселүү тамыры болсун дейли. Бул учурда төмөнкүдөй катыштар орун алат:

$$F(\alpha)=0,\quad F(\alpha)=0,\dots,F^{(k-1)}(\alpha)=0,F^k(\alpha)\neq 0 \tag{4.2.9}$$

Эгерде (4.2.4) теңдемесинин чыгарылышын (4.2.6) түрүндө издесек, анда (4.2.6) системасында теңдеменин саны $m+1-k$ болот. Ал эми белгисиздин саны $m+1$. Демек, бул системадан белгисиздер бир маанилүү толук аныкталбайт. Бул учурда (4.2.4) теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y(x) = x^k (q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0) e^{\alpha x} \quad (4.2.10)$$

Мында $q_m, q_{m-1}, \ldots, q_1, q_0$ белгисиз туруктуу сандар. (4.2.10) туюнтмасын (4.2.4) теңдемесине коюп, $L$ операторунун сызыктуулук касиетин колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} &q_m L(e^{\alpha x} x^{m+k}) + q_{m-1} L(e^{\alpha x} x^{m-1+k}) + \ldots + q_1 L(e^{\alpha x} x^{1+k}) + \\ &q_0 L(e^{\alpha x} x^k) = e^{\alpha x} (p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_1 x + p_0 \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

(4.2.11) сол жагындагы операторду (4.2.6) формуласын $u=e^{\alpha x}$, $v=x^j$ болгондо колдонуп жана (4.2.9)ду эске алып эсептейбиз

$$L\left(e^{\alpha x} x^{m+k}\right) = \left\{ \frac{(x^{m+k})^{(k)}}{k!} F^{(k)}(\alpha) + \frac{x^{m+k}}{k!} F^{(k+1)}(\alpha) + \ldots + \frac{\left(x^{m+k}\right)^{(k+1)}}{(m+k)!} F^{(m+k)}(\alpha) \right\} e^{\alpha x}$$

$$L\left(e^{\alpha x} x^{m+k-1}\right) = \left\{ \frac{(x^{m+k-1})^{(k)}}{k!} F^{(k)}(\alpha) + \frac{x^{m+k-1}}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\alpha) + \ldots + \frac{\left(x^{m+k-1}\right)^{(k+1)}}{(m+1)!} F^{(m-k)}(\alpha) \right\} e^{\alpha x}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$L\left(e^{\alpha x} x^{k+1}\right) = \left\{ \frac{(x^{1+k})^{(k)}}{k!} F^{(k)}(\alpha) + \frac{\left(x^{1+k}\right)^{(k+1)}}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\alpha) \right\} e^{\alpha x},$$

$$L\left(e^{\alpha x} x^k\right) = F^{k}(\alpha) e^{\alpha x}$$

Жогоркуларды (4.2.11)ге коюп $e^{\alpha x}$ке эки жагын кыскартып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$q_m \left\{ \frac{\left(x^{m+k}\right)^{(k)}}{k!} F^{(k)}(\alpha) + \frac{\left(x^{m+k}\right)^{(k+1)}}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\alpha) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(x^{m+k}\right)^{(k+m)}}{(m+k)!} F^{(m+k)}(\alpha) \right\} + q_{m-1} \left\{ \frac{\left(x^{m+k-1}\right)^{(k)}}{k!} F^{(k)}(\alpha) + \right.$$

$$+\frac{\left(x^{m+k-1}\right)^{(k+1)}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\alpha)+\ldots+\frac{\left(x^{m+k-1}\right)^{(m+k-1)}}{(m+k-1)!}F^{(m+k-k)}(\alpha)\Bigg\}+$$

$$+\ldots+q_1\left\{\frac{\left(x^{1+k}\right)^{(k)}}{k!}F^{(k)}(\alpha)+\frac{\left(x^{1+k}\right)^{(k+1)}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\alpha)\right\}+q_0F^{(k)}(\alpha)=$$

$$=p_mx^m+p_{m-1}x^{m-1}+\ldots+p_1x+p_0 \qquad (4.2.12)$$

барабарсыздыгынан $x$тин бирдей даражасындагы коэффициенттерди барабарлап, $q_m, q_{m-1},\ldots,q_1,q_0$ белгисиздерге карата төмөнкүдөй сызыктуу алгебралык системага ээ болобуз:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(m+k)(m+k-1)\ldots(m+1)}{k!}F^{(k)}(\alpha)q_m=p_m\\ C_{m+k}^{k+1}F^{(k+1)}(\alpha)q_m+C_{m+k-1}^{k}q_{m-1}F_{(\alpha)}^{(k)}=p_{m-1}\\ F^{(m+k)}(\alpha)q_m+F^{(m+k-1)}(\alpha)q_{m-1}+\ldots+q_1F_{(\alpha)}^{(k+1)}+q_0F_{(\alpha)}^{(k)}=p_0\end{array}\right\} \qquad (4.2.13)$$

(4.2.13) системасынын аныктагычын эсептейбиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}C_{m+k}^{k}F_{(\alpha)}^{(k)} & 0 & \cdots & 0\\ C_{m+k}^{k+1}F_{(\alpha)}^{(k+1)} & C_{m+k}^{k}F_{(\alpha)}^{(k)} & \cdots & 0\\ F_{(\alpha)}^{(m+k)} & F_{(\alpha)}^{(m+k-1)} & \cdots & F_{(\alpha)}^{k}\end{vmatrix}=C_{m+k}^{k}C_{m+k-1}^{k}\ldots1\left(F_{(\alpha)}^{(k)}\right)^{m+k}, F_{(\alpha)}^{(k)}\neq0$$

Демек, (4.2.13) системасынан $q_m, q_{m-1},\ldots,q_1,q_0$ белгисиздери бир маанилүү аныкталат.

*1-теорема.* Эгерде (4.2.4) теңдемесиндеги $a$ саны (4.2.2) мүнөздөөчү теңдемесинин тамыры болбосо, анда анын чыгарылышы (4.2.5) түрүндө болот $q_m, q_{m-1},\ldots,q_1,q_0$ белгисиз сандары (4.2.8) системасынан аныкталат.

*2-теорема.* Эгерде (4.2.4) теңдемесиндеги $a$ саны (4.2.2) мүнөздөөчү теңдемесинин k эселүү тамыры болсо, анда (4.2.1) теңдемесинин чыгарылышы (4.2.10) түрүндө болот жана $q_m, q_{m-1},\ldots,q_1,q_0$ белгисиз сандары (4.2.13) системасынан бир маанилүү аныкталат.

**1-мисал**

$$y''+y=4xe^x \tag{4.2.14}$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

(4.2.14)түн бир тектүү теңдемесинин мүнөздөөчү теңдемеси

$$\lambda^2+1=0$$

Бул теңдеменин тамырлары $\lambda_1=i, \quad \lambda_2=-i$. Демек, $\alpha$=1 мүнөздөөчү теңдемесинин тамыры болбойт. Ошондуктан (4.2.14) теңдемесинин чыгарылышын

$$y=(q_1x+q_0)e^x. \tag{4.2.15}$$

түрүндө издейбиз. Биздин учурда

$$F(\lambda)=\lambda^2+1, \; F'(\lambda)=2\lambda, \quad F(1)=2, \quad F'(1)=2.$$

Бул учурда (4.2.8) системасы төмөнкү түрдө болот:

$$\begin{cases} 2q_1=4 \\ 2q_1+2q_0=0. \end{cases}$$

Системадан

$$q_1=2, \; q_0=-2$$

Бул маанилерди (4.2.15)ке коюп, (4.2.14) теңдемесинин жеке чыгарылышын табабыз:

$$y(x)=2(x-1)e^x \tag{4.2.18}$$

Чыгарылышты бир тектүүнүн жалпы чыгарылышына кошуп, (4.2.14) бир тектүү эместин жалпы чыгарылышын алабыз.

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x$$

**2-мисал.**

$$y''+y'-2y=3xe^x \tag{4.2.17}$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла. (4.2.17) ге туура келген бир тектүү теңдемени карайбыз:

$$y''+y'-2y=0 \tag{4.2.18}$$

Буга туура келген мүнөздөөчү теңдеме:

$$F(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2=0$$

Бул теңдеменин тамырлары

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=-2$$

(4.2.18) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \qquad (4.2.19)$$

$a$=1 мүнөздөөчү теңдеменин бир эселүү тамыры. Демек (4.2.17) теңдемесинин жеке чыгарылышын 2-учур болгондуктан, төмөнкү түрдө жазабыз:

$$y(x) = x(q_1 x + q_0)e^x$$

$$F'(\lambda) = 2\lambda + 1,\ F''(\lambda) = 2,\ F(1) = 0, \cdots F'(1) = 3,\ F''(1) = 2 \quad (4.2.20)$$

Бул учурда (4.2.13) системасы төмөнкү түрдө болот.

$$\begin{cases} C_2^1 \cdot 3 \cdot q_1 = 3, \\ C_2^2 \cdot 2 \cdot q_1 + 3q_0 = 0, \end{cases}$$

$C_1' = 2,\ C_1^2 = 2$ экендигин эске алып,
Мындан

$$q_1 = \frac{1}{2};\ q_0 = -\frac{1}{3}$$

Табылган маанилерин (4.2.20)га коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y(x) = x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)e^x = \frac{1}{6}(3x^2 - 2x)e^x$$

(4.2.17) нин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй болот:

$$y(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}(3x^2 - 2x)e^x = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$$

Ушул сыяктуу эле (4.2.4) теңдемесинин оң жагы тригонометриялык көп мүчө болсо, анын чыгарылышын да жогорудагыдай алгебралык системага алып келип чыгарууга болот.

Берилсин дейли:

$$L(y) = e^{\alpha x}(P_{m_1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{m_2}^{(2)}(x)\sin\beta x). \qquad (4.2.21)$$

Эйлердин формуласын колдонуп, (4.2.21)дин оң жагын төмөнкүдөй жазабыз:

$$e^{\alpha x}P_{m1}^{(1)}(x)\cos\beta x + e^x P_{m2}^{(2)}(x)\sin\beta x = e^{\alpha x}P_{m_1}^{(1)}\frac{e^{\beta_1 x} + e^{-\beta_1 x}}{2} +$$

$$+ e^{\alpha x}P_{m_1}^{(1)}\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2i} = e^{(\alpha + i\beta)x}\frac{(P_{m_1}^{(1)}(x) - iP_{m_2}^{(2)}(x))}{2} + e^{(\alpha + i\beta)x}\frac{(P_{m_1}^{(2)}(x) + iP_{m_2}^{(2)}(x))}{2}$$

Эгерде $\alpha + i\beta$ (4.2.2) мүнөздөөчү теңдемесинин тамыры болбосо, анда (4.1.2) теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m^{(1)}(x) + e^{(\alpha+i\beta)^x} Q_m^{(2)}(x) \qquad (4.2.22)$$

Мында $m=max(m_1 m_2)$

Бул туюнтманы (4.2.12) теңдемесине коюп, $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$ көп мүчөлөрүнүн коэффициенттерин аныктайбыз. $Q_m^{(1)}(x)$ жана $Q_m^{(2)}(x)$ көп мүчөлөрүнүн коэффициенттери бири-бирине түйүндөш болот. Демек, эгерде

$$Q_m^{(1)}(x) = Q_m^{(2)*}(x) + iQ_m^{(1)**}(x)$$

болсо, анда

$$Q_m^{(2)}(x) = Q_m^{(2)*}(x) - iQ_m^{(1)**}(x) \text{ болот.}$$

Буларды (4.2.22) туюнтмасына койсок, чыныгы функция алабыз. Бул учурда (4.2.21) теңдемесинин чыгарылышы (4.2.22) формуласы аркылуу аныкталат.

**3-мисал.**

$$y'' - y = x\sin x \qquad (4.2.23)$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла. (4.2.23)кө туура келген бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй болот:

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

(4.2.23)түн чыгарылышын издейбиз:

$$y^* = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x \qquad (4.2.24)$$

Себеби $i$ саны мүнөздөөчү теңдеменин тамыры болгон жок. Мунун туундусун эсептейбиз:

$$y'' = 2a\sin x - (ax-b)\cos x + 2\cos x - (cx+d)\sin x \qquad (4.2.25)$$

(4.2.24), (4.2.25)ти (4.2.23)кө коюп:

$$-2a\sin x - (\alpha x+b)\cos x + 2c\cos x - (cx+d)\sin x -$$

$$-(ax-b)\cos x - (cx+d)\sin x = x\sin x$$

формуласына ээ болобуз.

Мындан *sin x*тин жана *cos x*тин коэффициенттерин өзүнчө барабарлап, төмөнкүдөй система алабыз:

$$\begin{cases} -2a-2d=0, \\ -2c=1 \\ -2a=0 \\ -2b+2c=0 \end{cases}$$

Мындан

$$c=-\frac{1}{2}; \qquad a=0, \ b=-\frac{1}{2}, \qquad d=0$$

Бул табылган маанилерди (4.2.24)кө коюп:

$$y^*=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x$$

формуласына ээ болобуз.

Бир тектүү эмес (4.2.23) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй жазылат:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x$$

## § 4.3. Экинчи тартиптеги теңдеменин нөлү жөнүндө түшүнүк

Бизге төмөнкүдөй бир тектүү дифференциалдык теңдеме берилсин дейли:

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{4.3.1}$$

Мында $p_1(x), p_2(x)$ *(а,в)* интервалында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар.

$$y(x)=v(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds} \tag{4.3.2}$$

ордуна коюуну колдонобуз. Анда

$$y''=(v''-v'p_1)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds}+v(x)\left(-\frac{1}{2}p'_1(x)+\frac{1}{4}p_1^2(x)\right)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds},$$

$$y'=(v'-\frac{vp_1}{2}(x))e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds},$$

(4.3.2), (4.3.3) формулаларын (4.3.1)ге коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$v''-v'vp_1'\frac{1}{2}+vp_1^2\frac{1}{4}+p_1-\frac{p_1^2v}{2}+p_2v=0 \qquad (4.3.4)$$

Демек,

$$v''+\left(-\frac{1}{2}p_1'-\frac{1}{4}p_1^2+p_2\right)v=0$$

Каалагандай экинчи тартиптеги теңдемени (4.3.2) ордуна коюу формуласы аркылуу (4.3.4) түрүнө алып келүүгө болот.

Демек, бир тектүү сызыктуу экинчи тартиптеги теңдеменин жалпы түрүн төмөнкүдөй жазууга болот.

$$y''+Q(x)y=0 \qquad (4.3.5)$$

*Аныктама: Эгерде (а,в) интервалынын эки же андан көп чекитинде (4.3.5) теңдемесинин чыгарылышы нөлгө айланса, анда ал чыгарылыш ушул интервалда термелүүчү чыгарылыш деп аталат. Тескерисинче, чыгарылыш (а,в) интервалынын бир гана чекитинде нөлгө айланса же такыр нөлгө айланбаса, анда ал чыгарылыш термелбөөчү деп аталат.*

Төмөнкүдөй эки теңдеме карайбыз:

$$y''-y=0, \qquad y''+y=0$$

Биринчисинин чыгарылыштары $e^x, e^{-x}$ функциялар болот жана алар $(-\infty;\infty)$ интервалында бир да чекитте нөлгө айланбайт. Ал эми экинчи теңдеменин чыгарылыштары $\cos x, \sin x$ функциялары болот жана алар $(-\infty,\infty)$ интервалында чексиз көп чекитте нөлгө айланат. Демек, биринчинин чыгарылышы термелбөөчү, а экинчиники термелүүчү. Чыгарылыштын термелүүчүлүк касиети $Q(x)$ функциясынын белгисинен көз каранды болот.

*1-теорема. Эгерде (а,в) интервалында $Q(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болуп жана $Q(x)\leq 0$, $\forall x\in(a,b)$ болсо, анда (4.3.5) теңдемесинин чыгарылышы термелбөөчү болот.*

Д а л и л д ө ө. Тескерисинче, *(а,в)* интервалында $y_1(x)\neq 0$, термелүүчү, б.а. жок дегенде эки нөлү болсун дейли.

$x_0, x_1;\quad x_0\neq x_1$. Чыгарылыштын нөлдөрү пределдик чекитке ээ болбойт. Чындыгында $x_1, x_2, ..., x_n, y_1(x)$ чыгарылышынын нөлү болсун, б.а. $y_1(x_i)=0$ жана $x^*$ пределдик чекити, анда $y_1(x)$ үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде

$$0 = \lim_{i\to\infty}\frac{y_1(x_i)-y_1(x^*)}{x_i - x^*} = y_1'(x^*) \tag{4.3.7}$$

Демек, $y_1(x)$ чыгарылышынын өзү жана туундусу $x^*$ чекитинде нөлгө айланат. Жашоо теоремасы боюнча мындай чыгарылыш теңдеш нөл болот. Бул болсо $y_1(x)\neq 0$ карама-каршы. Нөлдөрдүн аралыгы бир-биринен оң санга айырмаланат. Мындан $x_1 - x_0 > 0$ $y_1(x)$ чыгарылышы төмөнкүдөй теңдештикти канааттандырат:

$$y''_1 + Q(x)y_1 \equiv 0$$

мындан

$$y''_1(x) = -Q(x)y_1(x) \tag{4.3.8}$$

$y_1(x)$ функциясы $(x_0, x_1)$ интервалында өзүнүн белгисин сактайт. Анык болсун үчүн ал $y_1(x)>0$ болсун. Демек, теореманын шартынын негизинде (4.3.8), теңдештигинен

$$y_1''(x) \geq 0 \tag{4.3.9}$$

экендигин алабыз. Бул болсо $y'_1(x)$ функциясы өсүүчү функция экендигин көрсөтөт. $y''_1(x_0)\neq 0$ анткени $y_1(x)<0$ жана $y_1(x_0)<0$ болсо, $y_1(x_0)\equiv 0$ экендиги келип чыгат.

Туундунун аныктамасы боюнча

$$y_1'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{y_1(x_0+h)-y_1(x_0)}{h} > 0 \tag{4.3.10}$$

Төмөнкүдөй айырманы карайбыз:

$$y_1(x_1) - y_1(x_0) = y_1'(x_0 + \theta(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) \tag{4.3.11}$$

Чектүү өсүндү жөнүндөгү Лагранждын теоремасын колдондук. (4.3.11) барабардыгынын сол жагы нөлгө барабар. Ал эми оң жагы $y'_1(x_0)$ өсүүчү жана $y'_1(x_0)>0$ болгондуктан, $x_0 + \theta(x_1 - x_0) > x_0$ барабарсыздыгынан $y'_1(x_0 + \theta(x_1 - x_0)) > 0$, ушул барабарсыздыктан жана $x_1 - x_0 > 0$ барабарсыздыгынан $y'_1(x_0 + \theta(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)) > 0$ экендиги келип чыгат.

Демек, $y_1(x_1) - y_1(x_0) > 0$. Бул болсо $y_1(x_1) - y_1(x_0) = 0$ менен карама-каршы болот. Карама-каршылык $y_1(x)$ термелүүчү болсун дегенден келип чыкты: Демек, $y_1(x)$ нөлгө эки чекитте айланбайт, б.а. термелбөөчү. Теорема толук далилденди.

$y_2(x)$ (4.3.5) теңдемесинин $y_1(x)$ чыгарылышы менен сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышы болсун дейли.

*2-теорема Эгерде (4.3.5) теңдемесинин чыгарылышы $y_1(x)$ термелүүчү болсо, анда $y_1(x)$тин удаалаш эки нөлүнүн ортосунда аны менен сызыктуу көз каранды эмес $y_2(x)$ чыгарылышынын эң жок дегенде бир нөлү болот.*

Д а л и л д ө ө: $x_0, x_1, y_1(x)$ тин удаалаш эки нөлү болсун дейли. Далилдөөнү тескерисинче жүргүзөлү: $y_2(x)$ $(x_0, x_1)$ интервалында нөлгө айланбасын дейли. $y_1(x)$ жана $y_2(x)$ чыгарылыштары үчүн Вронскийдин аныктагычын карайбыз.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1; \qquad (4.3.12)$$

$y_1(x)$ $(x_0, x_1)$ интервалында өзүнүн белгисин сактайт. $y_2(x)$ $x = x_0$, $x = x_1$ болгондо да нөлгө айланбайт. Анык болсун үчүн $y_1(x) > 0$. Жогорудагы далилдөө боюнча $y_1'(x) > 0$. Анда $y_1'(x) < 0$ (4.3.12) теңтештигинин эки жагын $y^2{}_2(x)$ ке бөлүп жана

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2 y_1 - y_1 y_2}{y_2^2}$$

экендигин эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{y^2{}_2} W(x)$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын $x_0, x_1$ ге чейин интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(s)}{y_2^2} ds \qquad (4.3.13)$$

же

$$0 = \frac{y_1(x_1)}{y_2(x_1)} - \frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(s)}{y_2^2} ds$$

(4.3.13) оң жагындагы интегралдын алдындагы функция үзгүлтүксүз нөлгө барабар эмес, демек интеграл нөлгө барабар эмес. (4.3.13)төн карама-каршылык алдык. Бул карама-каршылык $y_2$ $(x_0, x_1)$ интервалынын бир да чекитинде нөлгө айланбайт дегенден алынды. Демек, жок дегенде бир чекитте нөлгө айланат, теорема далилденди.

Эгерде бизге эки дифференциалдык теңдеме берилсе, анда алардын чыгарылыштарынын термелүүчүлүгү коэффициенттеринен көз каранды болот:

Бизге

$$y''+q_1(x)y=0 \tag{4.3.14}$$

жана

$$z''+q_2(x)z=0 \tag{4.3.15}$$

теңдемелери берилсин.

*Теорема: Эгерде* $q_2(x)\ge q_1(x)$ *болсо, анда (4.3.14) теңдемесинин эки нөлүнүн ортосундагы (4.3.15) теңдемесинин каалаган чыгарылышынын эң жок дегенде бир нөлү болот.*

Д а л и л д ө ө: $y_1(x)$ (4.3.14) теңдемесинин чыгарылышы жана $x_0, x_1$ анын удаалаш эки нөлү болсун дейли. $z_1(x)$ (4.3.15) теңдемесинин каалаган чыгарылышы жана ал $(x_0, x_1)$ интервалынын бир да чекитинде нөлгө айланбасын, б.а. теореманы карама-каршы метод менен далилдейбиз. (4.3.14), (4.3.15) теңдемелеринен төмөнкүдөй теңдештик алабыз:

$$y_1''+q_1(x)y_1\equiv 0$$

$$z_1''+q_2(x)z_1\equiv 0$$

Биринчини $z_1$ге, экинчини $y_1$ге көбөйтүп, бири-биринен кемитип, төмөнкүдөй теңдештикке ээ болобуз:

$$z''_1 y_1 - y''_1 z_1 \equiv -(q_2-q_1)z_1y_1.$$

Мындан

$$\frac{d}{dx}(z'_1 y_1 - y'_1 z_1)\equiv -\left(q_2-q_1\right)z_1y_1$$

Акыркы теңдештикти $x_0$дон $x_1$ге чейин интегралдап, төмөнкүнү алабыз:

$$(z'_1 y_1 - y'_1 z_1)\Big|_{x_0}^{x_1} \equiv -\int_{x_0}^{x_1}\left(q_2(s)-q_1(s)\right)z_1(s)y_1(s)ds \tag{4.3.16}$$

Бул теңдештиктин сол жагын карайбыз.

$$z'_1(x_1)y_1(x_1)-y'_1(x_1)z_1(x_1)-z'_1(x_0)y_1(x_0)+y'_1(x_0)z_1(x_0)=$$
$$=-y'_1(x_1)z_1(x_1)+y'_1(x_0)z_1(x_0) \tag{4.3.17}$$

Жалпылыкты бузбастан $y_1(x), z_1(x)(x_0, x_1)$ интервалында нөлдөн чоң болсун дейли. Бул учурда

$$y'_1(x_1) < 0, \qquad y'_1(x_0) > 0$$

Демек, акыркы барабарсыздыктан жана (4.3.17) барабардыгынан (4.3.16) теңдештигинин сол жагы нөлдөн чоң болот. Ал эми (4.3.16) нын оң жагындагы интегралдын алдындагы функция теореманын шарты боюнча $q_2(x) - q_1(x) \geq 0$ жана $z_1(s) y_1(s) \geq 0$ болгондуктан, оң функция болот. Демек, (4.3.16)нын оң жагы терс сан. (4.3.16) теңдештиги карама-каршылыкка алып келди. Бул карама-каршылыкты ($x_0$, $x_1$) интервалында $z_1(x)$ чыгарылышынын нөлү жок дегенден алдык. Демек, жок дегенде бир чекитте нөлгө айланат. Теорема толук далилденди. Бул теорема (4.3.5) теңдемесинин нөлүнүн аралыгын жогору жана төмөн жагынан чектеш үчүн колдонулат. $Q(x)$ функциясы *(а,в)* интервалында төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырсын дейли

$$m \leq Q(x) \leq M, m > 0\ x \in (a,b) \tag{4.3.18}$$

Төмөнкүдөй эки теңдеме карайбыз:

$$u'' + mu = 0 \tag{4.3.19}$$

$$z'' + Mz = 0 \tag{4.3.20}$$

(4.3.19) теңдемесинин чыгарылышы

$$u_1 = \sin\sqrt{m x}$$

Демек, эки удаалаш нөлдүн аралыгы $x_{k+1} - x_k = \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ болот. Ошондой эле (4.3.20) теңдемесинин эки удаалаш нөлүнүн аралыгы $x_{k+1} - x_k = \dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ болот.

Берилген тещдеменин эки нөлүнүн ортосундагы аралыкты

$$x_{k+1} - x_k = \delta$$

деп белгилейбиз.

(4.3.5) теңдемеси менен (4.3.19) теңдемесин салыштырса, жогорку теорема боюнча берилген теңдеме (4.3.19)га караганда ылдам термелүүчү болот, б.а. нөлдөрүнүн аралыгы (4.3.19) нөлүнүн аралыгынан кичине болот.

$$\delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}} \tag{4.3.21}$$

Берилген теңдеме менен (4.3.20) теңдемесин салыштырабыз. Жогорку теорема боюнча (4.3.20) теңдемесинин чыгарылышы берилген теңдеменин чыгарылышына караганда ылдамыраак термелүүчү болот.

Ошондуктан,

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \delta \tag{4.3.22}$$

барабарсыздыгы аткарылат. Демек, (4.3.21), (4.3.22) барабарсыздыктарын бириктирип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \delta \le \frac{\pi}{\sqrt{m}} \tag{4.3.23}$$

$y_1(x)$ (4.3.5) теңдемесинин чыгарылышы термелүүчү болсун дейли, анда аны менен сызыктуу көз каранды эмес $y_2(x)$ чыгарылышынын $x_0, x_1, y_1(x)$ чыгарылышынын удаалаш эки нөлүнүн ортосунда жок дегенде бир нөлү болоорун далилдейбиз.

*Теорема: Эгерде $x_0, x_1, y_1(x)$ чыгарылышынын удаалаш эки нөлү болсо, анда аны менен сызыктуу көз каранды эмес, $y_2(x)$ чыгарылышынын жок дегенде бир нөлү болот.*

Д а л и л д ө ө. Тескери метод менен далилдейбиз. $y_2(x)$ чыгарылышы $(x_0, x_1)$ интервалында бир да чекитте нөлгө айланбасын дейли. Жалпылыкты бузбастан $y_2(x) > 0, x \in (x_0, x_1)$

Төмөнкүдөй эки теңдештикти алабыз

$$y''_1 = -Q(x)y_1, y''_2 = -Q(x)y_2,$$

Биринчи теңдештикти $y_2$ге, ал эми экинчи теңдештикти $y_1$ге көбөйтүп, биринчисинен экинчисин кемитебиз:

$$y''_1 y_2 - y''_2 y_1 \equiv -Q(x)y_1 y_2 + Q(x)y_2 y_1 \equiv 0.$$

Бул теңдештикти төмөнкүдөй жазабыз:

$$\frac{d}{dx}\left(y'_1 y_2 - y'_2 y\right) = 0$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын $x_0$дөн $x_1$ге чейин интегралдайбыз:

$$\left(y'_1(s)y_2(s) - y'_2(s)y_1(s))\right|_{x_0}^{x_1} = 0$$

Мындан

$$y'_1(x_1)y_2(x_1) - y'_2(x_1)y_1(x_1) - y'_1(x_0)y_2(x_0) + y'_2(x_0)y_1(x_0) = 0$$

же болбосо

$$y'_1(x_1)y_2(x_1) - y'_1(x_0)y_2(x_0) = 0 \tag{4.3.24}$$

$y_2(x)$ чыгарылышы $x_0$ жана $x_1$ чекиттеринде нөлгө барабар эмес

$$y_2(x_0) \neq 0, \qquad y_2(x_1) \neq 0$$

Эгерде $y_2(x_0) = 0$, же $y_2(x_1) = 0$ десек, $y_1(x), y_2(x)$ чыгарылыштары үчүн Вронскийдин аныктагычы нөлгө барабар болот. Бул болсо мүмкүн эмес, анткени $y_1(x), y_2(x)$ чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес. Демек, $y_2(x_1) > 0$, $y_2(x_0) > 0$. Ал эми $y_1(x)$ чыгарылышы үчүн $y_1'(x_0) > 0$ жана $y_1'(x_1) < 0$ эске алып, (4.3.24) теңдештигинен карама-каршылык алабыз, ал жогоркулар боюнча $y_1'(x_1)y_2(x_1) - y_1'(x_0)y_2(x_0) < 0$.

Демек, $y_2(x)$ чыгарылышынын $(x_0 x_1)$ интервалында жок дегенде бир нөлү болот. Теорема далилденди.

Мисал.

$$y'' + y = 0$$

теңдемесин алалы.

Бул теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес эки чыгарылышы бар:

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x.$$

Биринчи чыгарылыштын нөлдөрү $\cos x = 0$ теңдемесин канааттандырат. Демек, биринчи чыгарылыштын нөлү төмөнкү чекиттер болот:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in Z$$

Экинчи чыгарылыштын нөлдөрү $\sin x = 0$ теңдемесин канааттандырат. Мындан $x = \pi n, \quad n \in Z$. Биринчи чыгарылыштын удаалаш эки нөлү $n = 0, \quad n = 1$ болгондо,

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{3\pi}{2};$$

Демек, экинчи чыгарылыштын нөлү $\pi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, биринчи чыгарылыштын эки нөлүнүн ортосунда.

# V ГЛАВА

# СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЖАЛПЫ ТЕОРИЯСЫ

## § 5.1. Сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы үчүн жашоо жана жалгыздык теоремасы

*1. Сызыктуу теңдемелер системасынын матрицалык түрдө жазылышы.*

Сызыктуу дифференциалдык $n$ теңдемелер системасын карайлы.

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{k-1}^{n}a_{jk}(t)y_k+f_j(t), \qquad j=1,2,...,n \tag{5.1.1}$$

Мында $y_j(t)$– белгисиз, $a_{jk}(t), f_j(t)$ – белгилүү функциялар. Эгерде (5.1.1) системасында $f_j(t)=0$. $(j=1,2..n)$ болсо, анда система бир тектүү деп, ал эми андай болбогондо система бир тексиз система деп аталат. (5.1.1) системасына төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизсек

$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \dots\\ y_n(t)\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \dots\\ f_n(t)\end{pmatrix}, \qquad A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(t) & a_{2n}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

анда $nxn$ өлчөмдүү $A(t)$ матрица функциясына жана $n$– өлчөмдүү $y(t), f(t)$ вектор функцияларына карата (5.1.1) системасы

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+f(t) \tag{5.1.2}$$

түрүндө жазылат.

Эгерде матрицаны матрицага көбөйтүү, кошуу жана эки матрицанын барабардыгы жөнүндөгү эрежелерди эске алсак, анда (5.1.1) жана (5.1.2) системалары бири-биринен айырмасы жок эквиваленттүү системалар болот.

Белгилүү каалагандай $y_j^0 (j=1,2,..n)$ сандары үчүн $t=t_0$ болгондо

$$y_j(t_0) = y_j^0 \qquad (j=1,2,...,n) \tag{5.1.3}$$

барабардыктары (5.1.1) системасы үчүн баштапкы шарты деп аталат. (5.1.3.) барабардыгына

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \dots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

белгилөөлөрдү киргизсек, анда (5.1.3) шарты

$$y(t_0) = y^0 \tag{5.1.4}$$

түрүндө жазылат. (5.1.1), (5.1.3) маселеси же ага эквиваленттүү болгон (5.1.2), (5.1.4) маселеси Коши маселеси деп аталат.

*2. Жашоо жана жалгыздык теоремасы.*

*Теорема. Эгерде вектор-функция f(t) жана матрица функция A(t), I=[a,b] аралыгында үзгүлтүксүз болушса, б.а.* $A(t), f(t) \in C(I)$ *жана* $t_0 \in I$. *Анда 1). (5.1.1.), (5.1.3) же ага экиваленттүү болгон (5.1.2), (5.1.4) Коши маселесинин чыгарылышы I аралыгынын бардык чекитинде жашайт.* 2). (5.1.2), (5.1.4) Коши маселесинин чыгарылышы жалгыз. Эгерде $y(t), x(t)$ вектор функцияларды бир эле (5.1.4) шартын канааттандырган (5.1.2) системасынын чыгарылыштары болсо, анда $I$ аралыгынын бардык чекитинде $y(t) \equiv x(t)$. (5.1.4) шартын эске алып, (5.1.2) системасынын $[t_0, t] \in I$ аралыгында интегралдасак, анда төмөндөгүдөй интегралдык теңдемени алабыз:

$$y(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau) y(\tau) d\tau, \tag{5.1.5}$$

Мында

$$g(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Теореманын шартынын негизинде (5.1.2), (5.1.4) Коши маселеси менен (5.1.5) интегралдык теңдемеси бири-бирине эквиваленттүү, б.а. (5.1.2), (5.1.4) Коши маселесинин чыгарылышы (5.1.5) интегралдык теңдемесинин чыгарылышы болуп жана тескерисинче (5.1.5) теңдемесинин чыгарылышы (5.1.2), (5.1.4) Коши маселесинин чыгарылышы болорун оңой эле текшерүүгө болот.

(5.1.5) интегралдык теңдемесине удаалаш жакындаштыруу ыкмасын колдонобуз:

$$y^0(t) = g(t),$$

$$y^1(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau) y^0(\tau) d\tau, \qquad (5.1.6)$$

$$-----------------$$

$$y_t^r(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau) y^{k-1}(\tau) d\tau,$$

$$-----------------$$

Теореманын шарты боюнча $A(t)$ матрица функциясы жана $f(t)$ вектор функциясы $I$ аралыгында үзгүлтүксүз болушкандыктан, удаалаш жакындаштырылган $y^0(t), y^1(t), \ldots, y^k(t), \ldots$ вектор функциялары да $I$ аралыгында үзгүлтүксүз болот. Удаалаш жакындаштырылган $y^k(t)$ функциясы $I$ аралыгында $y(t)$ функциясына бир калыпта жыйналарын далилдейли.

Төмөндөгүдөй катарды карайбыз:

$$y(t) = y^0(t) + (y^1(t) - y^0(t)) + \ldots + (y^{k+1}(t) - y^k(t)) + \ldots \qquad (5.1.6)$$

Бул катардын жекече суммалары $y^0(t), y^1(t), \ldots, y^k(t) \ldots$ функциялары болуп эсептелет, ошондуктан (5.1.6) катарынын бир калыпта жыйналуучулугунан $\left\{ y^k(t) \right\}$ удаалаштыгынын бир калыпта жыйналуучулугу келип чыгат.

Функционалдык анализ теориясынан белгилүү болгондой $C\ I$ мейкиндигинде $y(t)$, $A(t)$ матрицалары үчүн норманы

$$\|y(t)\| = \max_{t\in I}\|y(t)\| = \max_{1\le k\le n}\left(\max_{t\in I}|y_k(t)|\right),$$

$$\|A(t)\| = \max_{t\in I}\|A(t)\| = \max_{1\le j\le n}\left(\max_{t\in I}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}(t)|\right)$$

формулалар менен аныктасак, анда катарлар теориясынан белгилүү болгондой (5.1.6) катарынын жыйналуучу болушу үчүн

$$\|y^0(t)\| + \|y^1(t) - y^0(t)\| + \ldots + \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| + \ldots \qquad (5.1.7)$$

катарынын жыйналуучулугу жеткиликтүү болот. $g(t)$ вектор функциясы жана $A(t)$ матрица функциясы $t \in I$ аралыгында үзгүлтүксүз болушкандыктан, алар чектелген функциялар болот, б.а. $c_1$, $c_2$ деген турактуу сандары жашап

$$\|g(t)\| \le c_1, \|A(t)\| \le c_2$$

барабарсыздыктары аткарылат.

Жогоруда аныкталган норма боюнча (5.1.7) катарынын ар бир мүчөсүн баалайлы.

$$\|y^0(t)\| \le c_1$$

$$\|y^1(t) - y^0(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)g(\tau)d\tau\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)g(\tau)\|d\tau\right| \le \qquad (5.1.8)$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t}\|A\|(\tau)\|^{\cdot} g(\tau)\|d\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} C_1C_2 d\tau\right| = C_1C_2|t - t_0|.$$

Бул барабарсыздыкты далилдөөдө төмөнкүдөй эки барабарсыздыкты

$$\|A(\tau)g(\tau)\| \le \|A(\tau)\|\|g(\tau)\|,$$

$$\left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)g(\tau)\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|\|g(\tau)\|d\tau\right|.$$

колдондук. Бул эки барабарсыздык функционалдык анализ теориясында оңой эле көрсөтүлгөн. (5.1.7) катарынан кийинки мүчөсүн баалайлы.

$$\left\|y^2(t)-y^1(t)\right\|=\left\|\int_{t_0}^{t}A(\tau)(y^1(\tau)-y^0(\tau))d\tau\right\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left\|A(\tau)\right\|\left\|y^1(\tau)-y^0(\tau)\right\|d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int_{t_0}^{t}c_2c_1c_2\left|\tau-t_0\right|d\tau\right|=c_1c_2^2\left|\int_{t_0}^{t}\left|\tau-t_0\right|d\tau\right|=\frac{c_1c_2^2}{2}\left|t-t_0\right|^2$$

Мында (5.1.8) барабарсыздыгын колдондук.

Математикалык индукция методунун жардамы менен (5.1.7) катарынын k– мүчөсү үчүн

$$\left\|y^k(t)-y^{k-1}(t)\right\|\le\frac{c_1c_2^k}{k!}\left|t-t_0\right|^k \qquad (5.1.9)$$

барабарсыздыгы орун алаарын далилдейли. $k$=1, $k$=2 болгондо (5.1.9) барабарсыздыгы далилденди. (5.1.9) барабарсыздыгы $k$–1 болгондо орун алсын дейли, б.а.

$$\left\|y^{k-1}(t)-y^{k-2}(t)\right\|\le\frac{c_1c_2^{k-1}}{(k-1)!}\left|t-t_0\right|^{k-1} \qquad (5.1.10)$$

барабарсыздыгы аткарылсын дейли, анда $k$– номери үчүн

$$\left\|y^k(t)-y^{k-1}(t)\right\|=\left\|\int_{t_0}^{t}A(\tau)(y^{(k-1)}(\tau)-y^{(k-2)}(\tau))d\tau\right\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left\|A(\tau)\right\|\left\|y^{(k-1)}(\tau)-y^{(k-2)}(\tau)\right\|d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int_{t_0}^{t}c_2\frac{c_1c_2^{k-1}}{(k-1)!}\left|\tau-t_0\right|^{k-1}d\tau\right|=\frac{c_1c_2^k}{(k-1)!}\left|\int_{t_0}^{t}\left|\tau-t_0\right|^{k-1}d\tau\right|=\frac{c_1c_2^k}{k!}\left|t-t_0\right|^k$$

(5.1.10) барабарсыздыгы орун алат. Мында (5.1.10) барабарсыздыгын колдондук.

$\left|t-t_0\right|\le b-a$ болгондуктан, (5.1.9) барабарсыздыгынан

$$\left\|y^k(t)-y^{k-1}(t)\right\|\le\frac{c_1c_2^k}{k!}(b-a)^k$$

барабарсыздыгын алабыз. Бул барабарсыздыктын оң жагы $t$дан көз каранды эмес. Андыктан

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_1}{k!}\left[c_2(b-a)\right]^k$$

сандык катарын түзсөк, анда ал катар, биринчиден жыйналуучу катар (суммасы $c_1e^{c_2(b-a)}$ га барабар), экинчиден (5.1.7) катарын мажаранттоочу катар болот. Демек, (5.1.7) катары да жыйналуучу катар, андыктан (5.1.10) катарынын $I$ аралыгында бир калыпта жыйналуучулугу келип чыгат. Демек, $\left\{y^k(t)\right\}$ удаалаштыгы $I$ аралыгында $y(t)$ функциясына бир калыпта жыйналат.

$$\lim_{k\to\infty} y^k(t) = y(t) \qquad (5.1.11)$$

жана ал жыйналган $y(t)$ функциясы $I$ аралыгында үзгүлтүксүз болот. (5.1.11) барабардыгынын негизинде (5.1.6) барабардыгынан $k\to\infty$ пределге өтсөк, анда $y(t)$ функциясы $I$ аралыгынын бардык чекитинде интегралдык теңдемесин канааттандырарын көрөбүз. (5.1.1) (5.1.3) Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы далилденди.

Чыгарылыштын жалгыздыгын далилдейли. Тескерисинче (5.1.5) интегралдык теңдемеси $y(t), z(t)$ деген эки чыгарылышка ээ болот деп болжолдойлу, анда

$$y(t)-z(t)=\int_{t_0}^{t} A(\tau)(y(\tau-z(\tau))d\tau$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардыктын эки жагынан нормага өтүп, төмөнкүдөй барабарсыздыкты алабыз:

$$\|y(t)-z(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)(y(\tau)-z(\tau)d\tau\right\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)(y(\tau-z(\tau)\|d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|\|y(\tau)-z(\tau)\|d\tau\right|\le c_2\|y(\tau)-z(\tau)\|\left|\int_{t_0}^{t}d\tau\right|=c_2(t-t_0)\|y(\tau)-z(\tau)\|\le$$

$$\le c_2(b-a)\|y(\tau)-z(\tau)\|$$

Эгерде $c_2$ турактуусун $c_2(b-a)<1$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай кылып тандап алсак, б.а. $c_2=\dfrac{2}{b-a}$ болсо, анда $\|y(t)-z(t)\|=0$ келип чыгат, ошондуктан $y(t)=z(t), \qquad t\in I$ . Биздин болжолдообуз карама-каршылыкка туш келди, теореманын жалгыздыгы далилденди.

## § 5.2. Сызыктуу бир тектүү теңдемелер системасы

*1. Суперпозиция принциби*

Коэффициенттери $a_{jk}(t)$, $I=[a,b]$ аралыгында берилип, үзгүлтүксүз функциялар болгон төмөндөгүдөй бир тектүү теңдемелер системасын карайлы:

$$\frac{dy_1}{dt}=a_{11}(t)y_1+\ldots+a_{1n}^{(t)}y_n$$

$$\text{-----------------------} \qquad (5.2.1)$$

$$\frac{dy}{dt}=a_{n1}(t)y_1+\ldots+a_{nn}^{(t)}y_n$$

Биз мурда белгилегендей $y(t)=\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$, $\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}$ – вектор функцияларына жана $A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t)\ldots a_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(t)\ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ – матрица – функциясына карата, (5.2.1) системасы

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y(t) \qquad (5.2.2)$$

системасына эквиваленттүү.

Эгерде $y^1(t), y^2(t),\ldots, y^k(t)$ $n$-өлчөмдүү вектор функциялары бир тектүү (5.2.1) системасынын же ага эквиваленттүү болгон (5.2.2) системасынын чыгарылыштары болсо, анда алардын сызыктуу комбинациясы $C_k y^1(t)+C_2 y^2(t)+\ldots+C_k y^k(t)$ да (5.2.1) системасынын же ага эквиваленттүү болгон (5.2.2) системасынын чыгарылышы болот. Мында $c_1, c_2,\ldots, c_k$ кандайдыр бир турактуу сандар. Чындыгында эле вектор-функциялардын сызыктуу комбинациясынан туунду алуунун, матрицаны вектор-функциялардын сызыктуу комбинациясына көбөйтүүнүн эрежелерин эске алып, жогорку сызыктуу комбинацияны (5.2.2) системасына койсок,

$$\frac{d}{dt}\left[c_1 y'(t)+c_2 y^2(t)+\ldots+c_k y^k(t)\right]=A(t)\left[c_1 y^1(t)+c_2 y^2(t)+\ldots+c_k y^k(t)\right].$$

$$c_1\left[\frac{dy^1(t)}{dt}-A(t)y^1(t)\right]+c_2\left[\frac{dy^2(t)}{dt}-A(t)y^2(t)\right]+\ldots+c_k\left[\frac{dy^k(t)}{dt}-A(t)y^k(t)\right]=0$$

барабарсыздыгын алабыз. Мындан $y^1(t), y^2(t),\ldots, y^k(t)$ вектор функциялары (5.2.2) системасынын чыгарылыштары болгондуктан,

$$0=0$$

тещдештигин алабыз.

*2. Вектор функциялардын сызыктуу кєз карандуулугу жана сызыктуу кєз каранды эместиги*

*Аныктама. Эгерде $I=[a,b]$ аралыгында аныкталган $y^1(t)$, $y^2(t),\ldots,y^k(t)$ вектор-функциялары жана $c_1,c_2,\ldots,c_k$ турактуу сандар үчүн*

$$c_1 y'+c_2 y''+\ldots+c_k y^k=0,\quad t\in I \qquad (5.2.3)$$

барабардыгы $c_1,c_2,\ldots,c_k$ сандарынын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болгондо аткарылса, анда $y^1(t),y^2(t),\ldots,y^k(t)$ вектор-функциялары $I$ аралыгында сызыктуу көз каранды вектор-функциялар деп аталат. Тескерисинче, $c_1y^1+c_2y^2+\ldots+c_ky^k=0,\quad t\in I$ барабардыгы $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$ болгондо гана аткарылса, анда $y^1(t),y^2(t),\ldots,y^k(t)$ вектор функциялары $I$ аралыгында сызыктуу көз каранды эмес вектор-функциялар деп аталат.

*3. Вронскийдин аныктагычы*

*Аныктама. $y'(t),y^2(t),\ldots,y^n(t)$ n-өлчөмдүү вектор-функциялар болушсун. Анда төмөндөгүдөй аныктагыч*

$$W(t)=\det(y^1(t),y^2(t),\ldots,y^n(t))\equiv\begin{vmatrix} y_1^1(t), y_1^2(t),\ldots,y_1^n(t)\\ y_2^1(t), y_2^2(t),\ldots,y_2^n(t)\\ \text{-----------}\\ y_n^1(t), y_n^2(t),\ldots,y_n^n(t)\end{vmatrix} \qquad (5.2.4)$$

Вронскийдин аныктагычы же вронскиан деп аталат.

Жогоруда Вронскийдин аныктагычында жана мындан аркы сызыктуу көз карандуулукту изилдөөдө вектор-функциялар $t\in I=[a,b]$ аралыгында аныкталган үзгүлтүксүз вектор-функциялар деп эсептелинет.

*1-Лемма. Эгерде* $y^1(t),...,y^n(t)$ *вектор-функцияларынын вронскианы I аралыгынын жок дегенде бир* $t_0 \in I$ *чекитинде нөлдөн айырмалуу болсо, анда ал вектор-функциялар сызыктуу көз каранды эмес болот.*

Д а л и л д ө ө. Тескерисинче, вектор-функциялар сызыктуу көз каранды болушсун деп болжолдойлу, анда жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болгон $c_1, c_2, ..., c_n$ турактуу сандары табылып,

$$c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + ... + c_n y^n(t) = 0, \qquad t \in I$$

барабардыгы аткарылат. Айрым учурда ал барабардык $t_0 \in I$ чекити үчүн да аткарылат, б.а.

$$c_1 y^1(t_0) + c_2 y^2(t_0) + ... + c_n y^n(t_0) = 0 \tag{5.2.5}$$

Лемманын шарты боюнча $W(t_0) \neq 0$, андыктан бир тектүү (5.2.5) системасы $c_1, c_2, ..., c_n$ турактуу сандарына карата тривиалдуу гана, б.а. $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ чыгары-лышка гана ээ болот. Биз карама-каршылыкка туш келдик. $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ вектор-функциялар сызыктуу көз каранды эмес.

*2-Лемма. Эгерде* $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ *вектор-функциялары сызыктуу көз каранды болсо, анда анын вронскианы теңдеш нөлгө барабар болот.*

Д а л и л д ө ө. Эгерде мамычалар $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ вектор-функцияларынын мамычаларынан турган аныктагыч түзсөк, анда ал мамычалар сызыктуу көз каранды болушкандыктан, түзүлгөн аныктагыч нөлгө барабар болот. Ал эми түзүлгөн аныктагыч $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ вектор-функцияларынын вронскианын бергендиктен, ал вронскиан теңдеш нөлгө барабар болот.

*3-Лемма.* $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ – *n-өлчөмдүү вектор-функциялары (5.2.2) системасынын чыгарылыштары болсун дейли. Эгерде бул чыгарылыштардын вронскианы жок дегенде бир* $t \in I = [a,b]$ *чекитинде нөлгө барабар болбосо, анда ал чыгарылыштар сызыктуу көз каранды эмес болушат.*

Д а л и л д ө ө. Вронскиан $t_0$ чекитинде нөлгө барабар болсун дейли, б.а. $W(t_0) = 0$ анда $c_1, c_2, ..., c_n$ – турактууларына карата бир тектүү

$$c_1 y^1(t_0) + c_2 y^2(t_0) + ... + c_n y^n(t_0) = 0 \tag{5.2.6}$$

системасы нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, б.а. $c_1, c_2, ..., c_n$ сандарынын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болот. Төмөндөгүдөй вектор функцияны карайлы:

$$y\ (t) = c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + \ldots + c_n y^n(t), \qquad (5.2.7)$$

анда суперпозиция принциби боюнча (5.2.7) функциясы (5.2.2) системасынын чыгарылышы болот жана $y(t_0) = 0$ барабардыгын канааттандырат.

Теңдеш нөлгө барабар болгон $\tilde{y}(t) \equiv 0$ функциясын алалы. Ал функция (5.2.2) системасынын чыгарылышы болот жана $\tilde{y}(t_0) = 0$ барабардыгын канааттандырат. (5.2.2) системасынын y(t) жана $\tilde{y}(t)$ деген эки чыгарылышы бир эле баштапкы шартты канааттандырып жаткандыктан, чыгарылыштын жалгыздыгы теоремасынын негизинде

$$y(t) \equiv \tilde{y}(t)$$

Демек,

$$y(t) \equiv 0, \qquad t \in I = [a, b]$$

Анда (5.2.7) барабардыгынан

$$c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + \ldots + c_n y^n(t) = 0$$

барабардыгы $c_1, c_2, ..., c_n$ сандарынын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болгондо аткарылат. Андыктан $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ вектор-функциялары сызыктуу көз каранды.

*4. Лиувилл формуласы*

$y^1(t), ..., y^n(t)$ вектор функциялары (5.2.2) системасынын чыгарылыштары болушсун дейли. Бул чыгарылыштардын вронскианын карайлы.

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1^1(t), y_1^2(t) \ldots y_1^n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2^1(t), y_2^2(t) \ldots y_2^n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^1(t), y_n^2(t) \ldots y_n^n(t) \end{vmatrix}$$

жана аны *j*-жолчосу боюнча ажыраталы, анда

$$W(t) \quad \sum A_{jk} y_j \qquad (5.2.8)$$

Мында $A_{jk}$ аныктагычтары $y_j^k$ элементтеринин алгебралык толуктоосу. Мындан $A_{jk}$(t) аныктагычтары элементтеринен көз каранды эместигин эске алып, (5.2.1) барабардыгынан $y_j^k$ боюнча туунду алсак,

$$\frac{dW}{dy_j^k} = A_{jk}(t), \qquad (j,k=1,...,n)$$

барабардыгын алабыз. Андыктан, (5.2.8) барабардыгынан төмөнкүдөй барабардык келип чыгат:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{j,i=1}^{n} \frac{dW(t)}{dy_j^i(t)}(y_j^i(t))' = \sum_{j,i=1}^{n} A_{ji}(t)(y_j^i(t))' \qquad (5.2.9)$$

Эгерде $y^1(t), y^2(t),..., y^n(t)$ вектор функциялары (5.2.2) системасынын чыгарылышы экенин жана матрицаны вектор-функцияга көбөйтүү эрежесин эске алсак,

$$\left(y_j^i\right)' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k^i$$

барабардыгын алабыз. Анда (5.2.2) барабардыгынан

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{j,i=1}^{n} a_{jk}(t) \sum_{j,i=1}^{n} A_{ji} y_k^i \qquad (5.2.10)$$

барабардыгын алабыз. Мындан аныктагычтын касиеттери боюнча

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} y_k^i = 0, j \neq k$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} y_k^i = W, j = k$$

экендигин эске алсак, анда (5.2.10) барабардыгынан

$$\frac{dW(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t)\right) W(t)$$

тещдемеси келип чыгат. Бул барабардыкты интегралдап, төмөнкү Лиувиллдин формуласын алабыз

$$W(t) = W(t_0) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left( \sum_{j-1}^{n} a_{jj}(\tau) \right) d\tau \right\} \qquad (5.2.11)$$

*5. Чыгарылыштын фундаменталдуу системасы*

Шарт боюнча (5.2.2) системасындагы $A(t)$ матрица-функция $I=[a,b]$ аралыгында аныкталып, үзгүлтүксүз.

*Аныктама.* Сызыктуу (5.2.2) системасынын сызыктуу көз каранды эмес $n$ сандагы $y'(t), y^2(t),..., y^n(t)$ чыгарылыштары, чыгарылыштын фундаменталдуу системасы деп аталат.

*1-теорема. Сызыктуу (5.2.2) системасынын чыгарылышынын фундаменталдуу системасы жашайт.*

Д а л и л д ө ө: $n$ өлчөмдүү $e_1, e_2,..., e_n$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес векторлор болушсун жана $y^1(t), y^2(t),..., y^n(t)$ вектор-функциялары төмөндөгүдөй баштапкы шартты

$$y^1(t_0)=e_1, y^2(t_0)=e_2, y^n(t_0)=e_n,$$

канааттандырган (5.2.2) системасынын чыгарылыштары болушсун дейли. Анда бул чыгарылыштардын $t_0$ чекитиндеги вронскианы

$$W(t_0)=\det(e_1, e_2,..., e_n)\neq 0$$

Анткени $e_1, e_2,..., e_n$ – сызыктуу көз каранды эмес векторлор. Андыктан 1-лемманын негизинде $y'(t), y^2(t),..., y^n(t)$ чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес. Демек, алар чыгарылыштын фундаменталдуу системасын берет.

*2-теорема. Эгерде* $y'(t), y^2(t),..., y^n(t)$ *вектор-функциялары (5.2.2) системасынын чыгарылышынын фундаменталдуу системасын түзсө, анда (5.2.2) системасынын жалпы чыгарылышы*

$$y(t)=c_1y^1(t)+c_2y^2(t)+...+c_ny^n(t) \tag{5.2.12}$$

формуласы менен аныкталат. Мында $c_1, c_2,..., c_n$ – эркин турактуу сандар.

Д а л и л д ө ө. $t_0\in I$ чекити үчүн $y^1(t_0), y^2(t_0),..., y^n(t_0)$ чыгарылыштарынын аныктагычын түзсөк, анда 3-лемма боюнча ал аныктагыч нөлдөн айырмалуу. Ошондуктан $y^1(t_0), y^2(t_0),..., y^n(t_0)$ вектор-функциялары сызыктуу көз каранды эмес.

Андыктан $c_1, c_2,..., c_n$ эркин турактуулары жашап,

$$y(t_0)=c_1y^1(t_0)+c_2y^2(t_0)+...+c_ny^n(t_0)$$

формуласы орун алат.

Төмөнкүдөй вектор-функцияны карайлы:

$$\tilde{y}(t)=c_1y^1(t)+c_2y^2(t)+...+c_ny^n(t) \tag{5.2.13}$$

Анда ал суперпозиция принциби боюнча (5.2.2) системасынын чыгарылышы болот жана

$$\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$$

$y(t)$, $\tilde{y}(t)$ вектор-функциялары бир эле баштапкы шартты канааттандырган чыгарылыштар болушкандыктан, жалгыздык теоремасынын негизинде $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ барабардыгы орун алат жана (5.2.13) барабардыгынан (5.2.12) барабардыгы келип чыгат.

Бул теорема дифференциалдык теңдемелер теориясында негизги ролду ойнойт. Анткени (5.2.2) системасынын бүткүл чыгарылышын табыш үчүн анын сызыктуу көз каранды эмес $n$ чыгарылышын табуу жеткиликтүү болорун көрсөтүп турат.

*6. Фундаменталдуу матрица*

(5.1.12) чыгарылышын матрицалык формада жазууга болот, ал үчүн төмөнкүдөй матрицаларды киргизебиз.

*Аныктама.* Мамычалары чыгарылыштын фундаменталдуу системасынан турган матрица фундаменталдуу матрица деп аталат, б.а. матрица

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t)y_1^2(t)...y_1^n(t) \\ .......................... \\ y_n^1(t)y_n^2(t)...y_1^n(t) \end{pmatrix} \equiv (y^1(t)...y^n(t))$$

фундаменталдуу матрица. Мында

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ \cdots \\ y_n^1 \end{pmatrix}, y^2(t) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ \cdots \\ y_n^2 \end{pmatrix}, ..., y^n(t) = \begin{pmatrix} y_1^n \\ \cdots \\ y_n^n \end{pmatrix}$$

чыгарылыштын фундаменталдуу $y(t)$ матрицасы төмөндөгүдөй матрицалык

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{5.2.14}$$

теңдемесин канааттандырат. Чындыгында эле $y_s^k$ функциясы (5.2.14) системасынын $k$ теңдемесин канааттандырат, андыктан

$$\frac{dy_j^k}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)y_s^k(t)$$

барабардыгы орун алат. Мындан матрицаны матрицага көбөйтүү эрежеси боюнча

$$y'(t) = \left( \frac{dy_j^k(t)}{dt} \right) = \left( \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t) y_s^k(t) \right) = A(t)y(t)$$

барабардыгы келип чыгат.

*5- лемма.* (5.2.2) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t) = Y(t)C \tag{5.2.15}$$

формуласы менен аныкталат. Мында $Y(t)$– фундаменталдуу матрица, $C$– турактуулар мамычасы. Чындыгында эле вектор жолчону вектор мамычага көбөйтүүнүн эрежесин эске алсак, анда (5.2.13)төн (5.2.15) келип чыгат.

*3-теорема. (5.2.14) матрицалык теңдемесинин ар кандай чыгарылышы*

$$Y(t) = \tilde{Y}(t)C \tag{5.2.16}$$

формуласы менен аныкталат, мында $\tilde{Y}(t)$ – фундаменталдуу матрица; $C$- турактуулар матрицасы.

Д а л и л д ө ө. (5.2.14) матрицалык теңдеменин чыгарылышын

$$Y(t) = \tilde{Y}(t)C(t) \tag{5.2.17}$$

түрүндө издейбиз. (5.2.17) формуласын (5.2.14) тещдемесине коюп,

$$\frac{d}{dt}\tilde{Y}(t)C(t) + \tilde{Y}(t)\frac{d}{dt}C(t) = A(t)\tilde{Y}(t)C(t)$$

барабардыгын алабыз. $\tilde{Y}(t)$ фундаменталдуу матрица (5.2.14) теңдемесин канааттандыргандыктан,

$$\tilde{Y}(t)\frac{d}{dt}C(t) = 0 \tag{5.2.18}$$

барабардыгы келип чыгат. Фундаменталдуу матрицанын аныктагычы вронскианды бергендиктен жана ал нөлдөн айырмалуу болгондуктан, тескери $\tilde{Y}^{-1}(t)$ матрица жашайт. (5.2.18) барабардыгын $\tilde{Y}^{-1}(t)$ матрицасына сол жагынан көбөйтүп,

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0$$

барабардыгын алабыз. Мындан $C(t)$ матрицасы турактуу матрица экендиги көрүнүп турат, б.а. $C(t) = C - const$.

Анда (5.2.17) барабардыгынан (5.2.16) барабардыгы келип чыгат.

## § 5.3. Сызыктуу бир тексиз теңдемелер системасы

Сызыктуу бир тексиз $n$ теңдемелер системасын карайлы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t) \tag{5.3.1}$$

Мында $n{\times}n$– өлчөмдүү $A(t)$ матрица-функциясы жана $n$– өлчөмдүү $f(t)$ вектор-функциясы $I=[a,b]$ аралыгында аныкталган үзгүлтүксүз функциялар.

*Теорема. (5.3.1) системасынын айрым чыгарылышы*

$$y(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \tag{5.3.2}$$

формуласы менен аныкталат. Мында $Y(t)$ бир тектүү

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) \tag{5.3.3}$$

системасынын фундаменталдуу матрицасы.

Д а л и л д ө ө. Бир тектүү (5.3.3) теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t) = Y(t)C$$

экендиги бизге белгилүү. Бир тексиз (5.3.1) чыгарылышын туруктууларды вариациялоо ыкмасы боюнча

$$y(t) = Y(t)C(t) \tag{5.3.4}$$

түрүндө издейбиз. Мында $C(t)$- белгисиз вектор-функция. (5.3.4) формуласын (5.3.1) теңдемесине коюп жана $\frac{dY}{dt} = A(t)Y(t)$ барабардыгын эске алып, төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$A(t)Y(t)C(t) + Y(t)\frac{dC(t)}{dt} = A(t)Y(t)C(t) + f(t)$$

Y(t) фундаменталдуу матрицанын аныктагычы $I$ аралыгынын бир да чекитинде нөлгө барабар эмес болгондуктан, $Y^{-1}(t)$ – матрица-функция $I$ аралыгында жашайт жана үзгүлтүксүз. Андыктан жогорку барабардыктан

$$\frac{dC(t)}{dt} = Y^{-1}(t)f(t)$$

барабардыгы келип чыгат. Барабардыкты интегралдап,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau$$

формуласын алабыз. Муну (5.3.4) барабардыгына коюп (5.3.2) чыгарылышын алабыз. Бир тексиз (5.3.1) системасынын жалпы чыгарылышы анын айрым чыгарылышы менен бир тектүү системанын жалпы чыгарылышынын суммасынан турат, б.а.

$$y(t) = Y(t)C + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \tag{5.3.5}$$

Эгерде (5.3.10) системасы үчүн Коши маселеси коюлса, б.а.

$$y(t_0) = y^0 \tag{5.3.6}$$

баштапкы шарты берилсе, анда (5.3.6) шартынын негизинде (5.3.5) формуласынан

$$y^0 = Y(t_0)C$$

барабардыгын алабыз. Мындан барабардыктын эки жагын, сол жагынан $Y^{-1}(t_0)$ га көбөйтүп

$$C = Y^{-1}(t_0) y^0 \tag{5.3.7}$$

формуласын алабыз. (5.3.7) формуласын (5.3.5) формуласындагы $C$ нын ордуна коюп, (5.3.1), (5.3.6) Коши маселесинин чыгарылышын

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0) y^0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \tag{5.3.8}$$

алабыз.

# VI ГЛАВА

## ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

### §6.1. Туруктуу коэффициенттүү бир тектүү теңдемелер системасынын мүнөздөөчү теңдемеси жөнөкөй тамырга ээ болгон учурдагы чыгарылышы

Коэффициенттери $a_{jk}$ туруктуу болгон төмөндөгүдөй бир тектүү теңдемелер системасын карайлы:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n \\ -------------- \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Бул система $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \dfrac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt}) \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}$ вектор-функцияларына

жана $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасына карата $\dfrac{dy}{dt} = Ay(t)$ (6.1.2)

системасына эквиваленттүү.

**(6.1.1) системасынын же ага эквиваленттүү болгон (6.1.2) системасынын чыгарылышын**

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, ..., y_n = \alpha_1 e^{\lambda t}, \tag{6.1.3}$$

түрүндө же вектордук формада

$$y = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda t} \\ \cdots \\ \alpha_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} \equiv \alpha\, e^{\lambda t}$$

түрүндө издейбиз. Мында $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ белгисиз вектор жана $\lambda$ белгисиз сан.

Эгерде $\alpha_1 = \alpha_2 = ..., = \alpha_n = 0$ болсо, анда $y_1 = 0, y_2 = 0, ..., y_n = 0$ деген тривиалдык гана чыгарылышка ээ болобуз. Бул учур бизге керектүү чыгарылышты бербейт, ошондуктан биз тривиалдык эмес чыгарылышты тургузушубуз керек. (6.1.3) барабардыктарынан

$$\frac{dy_j}{dt} = \alpha_j \lambda e^{\lambda t}, (j = 1, 2, ..., n)$$

барабардыктарына ээ болобуз. Бул барабардыктарды (6.1.1) системасына коюп, барабардыктын эки жагын $\lambda e^{\lambda t}$ га кыскартып, андан кийин барабардыктын оң жагындагы мүчөлөрүн сол жагына өткөрүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ &a_{21}\alpha_2 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

же матрицалык түрдө

$$(A - \lambda E)\alpha = 0 \tag{6.1.5}$$

Мында $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 10...0 \\ 01...0 \\ ......... \\ 00...1 \end{pmatrix}$.

Ошентип, (6.1.1) системасынын чыгарылышын (6.1.3) түрүндө тургузуу маселеси (6.1.5) формуласынан көрүнүп тургандай $A$ матрицасынын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табуу маселесине алынып келинди. Сызыктуу алгебрадан белгилүү болгондой (6.1.4) же ага экиваленттүү болгон (6.1.5) системасы нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болушу үчүн, ал системанын негизги аныктагычынын нөлгө барабар болушу

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22}-\lambda \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2}\ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{6.1.6}$$

же det $(A-\lambda E)=0$ зарыл жана жеткиликтүү.

(6.1.6) теңдемеси $\lambda$ санына карата $n$ даражадагы теңдеме жана ал (6.1.1) системасынын мүнөздөөчү теңдемеси деп аталат. (6.1.6) теңдемесинен (6.1.5) системасы нөлдүк эмес чыгарылышка ээ боло тургандай $\lambda$-нын маанилери табылат. (6.1.6) теңдемесин чыгарсак, эселүү тамырларын кошо эсептегенде $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ деген $n$ тамырга ээ болот жана алар $A$ матрицасынын өздүк маанилерин берет. Бул табылган тамырлар жөнөкөй тамырлар болушсун дейли, б.а. алар бири-бирине барабар болбогон анык сандар болушсун. Анда алардын ар бирин (6.1.5) системасына коюп жана аларды чыгарып, (6.1.5) системасын канааттандырган жана нөлгө барабар эмес

$$\alpha^j=\begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \cdots \\ \alpha_n^j \end{pmatrix}, \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

векторлорун табабыз. Бул векторлор $A$ матрицасынын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ жөнөкөй өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлорун берет. Төмөндө мындан ары керек болуучу болгон кай бир түшүнүктөрдү жана теоремаларды далилдөөсүз эске салабыз [2],[3].

*Теорема 1. Эгерде A матрицасынын өздүк маанилери жөнөкөй болсо, б.а. бири-бирине барабар болбогон анык сандар болсо, анда аныктагычы нөлгө барабар болбогон nxn өлчөмдөгү T матрицасы жашап, ал A матрицасын диогоналдык түргө*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda_2 \ldots 0 \\ 00 \ldots \lambda_n \end{pmatrix} \tag{6.1.7}$$

алып келет. Мында $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – $A$ матрицасынын өздүк маанилери болот, ал эми $T$ матрицасы «өткөрүүчү» матрица деп аталат да, анын мамычалары, $A$ матрицасынын өздүк векторлорунан турат.

**1-мисал.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6.1.8}$$

матрицасын диагоналдык түргө келтирели:

$A$ матрицасынын өздүк маанилерин табабыз:

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

барабардыктан сол жагындагы үчүнчү тартиптеги аныктагычты ачып жана $\lambda$ га карата топтоштурсак,

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

тещдемеси келип чыгат. Мындан $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ деген тамырлар табылат да, алар $A$ матрицасынын өздүк маанилерин берет. Демек, $A$ матрицасы жөнөкөй түзүлүштө.

$A$ матрицасынын $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлорун табабыз:

$$(A - \lambda_j E)\alpha^j \equiv \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \tag{6.1.9}$$

Бул системага биринчи кезекте $\lambda_1 = 1$ маанисин коюп,

$$(A - E)\alpha^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \tag{6.1.10}$$

системасын алабыз. Эгерде $A\text{–}E$ матрицасынын рангын тапсак, анда $rang(A-E)=2$ болгондуктан, (6.1.10) системасы $3-rang(A-E)=1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот жана ал өздүк векторду берет.

Сызыктуу алгебрадан белгилүү болгондой (6.1.4) же ага эквиваленттүү болгон (6.1.5) системасы нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болуш үчүн, ал системанын негизги аныктагычы нөлгө барабар болушу керек. Демек (6.1.10)дон $\alpha^1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ келип чыгат.

Эми $\lambda_2=2$ маанисин (6.1.9) системасына коюп,

$$(A-2E)\alpha^2\equiv\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^j\\\alpha_2^j\\\alpha_3^j\end{pmatrix}=0 \qquad (6.1.11)$$

системасын алабыз. $A\text{–}2E$ матрицасынын рангы $rang(A-2E)=2$. Андыктан (6.1.11) системасы $3-rang(A-2E)=1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты тапсак, анда

$$\alpha^2\equiv\begin{pmatrix}\alpha_1^2\\\alpha_2^2\\\alpha_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Үчүнчү кезекте $\lambda_3=3$ маанисин (6.1.9) системасына коюп,

$$(A-3E)\alpha^3\equiv\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^j\\\alpha_2^j\\\alpha_3^j\end{pmatrix}=0 \qquad (6.1.12)$$

системасын алабыз. $A-3E$ матрицасынын рангы $rang(A-3E)=2$. Андыктан (6.1.12) системасы сызыктуу $3-rang(A-3E)=1$ көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот.

Ал чыгарылышты тапсак, анда

$$\alpha^3 \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Жогорку теоремада айтылган $T$ матрицасы

$$T \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.1.13)$$

формуласы менен аныкталат жана ал $A$ матрицасын

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (6.1.14)$$

формуласы менен диагоналдык түргө алып келет. (6.1.14) формуласын ощой эле текшерүүгө болот. Ошондуктан, аны өз алдынча иштөөгө калтырабыз.

Бизге $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$ деген вектор-функциясы берилген.

*Аныктама.* $z(t)$ вектор функциясынын туундусу деп, берилген ошол вектор-функциянын элементтеринин туундусунан турган векторду айтабыз, б.а.

$$\frac{d}{dt} z(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dz_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dz_n}{dt} \end{pmatrix} \qquad (6.1.15)$$

*Лемма.* $T$– өлчөмдүү турактуу матрица, $z(t)$ $n$– өлчөмдүү вектор-функция болсун. Анда

$$\frac{d}{dt}(T \cdot z(t)) = T \cdot \frac{dz(t)}{dt} \qquad (6.1.16)$$

барабардыгы орун алат. Ошентип, турактуу матрицаны вектор-функцияга көбөйтүүнүн туундусу кадимки турактуу санды функцияга көбөйтүүнүн туундусун табуунун формуласы менен бирдей.

*2-теорема. Эгерде (6.1.1) системасынын мүнөздөөчү теңдемеси бири-бирине барабар болбогон анык сандарды берсе, б.а. (6.1.1) системасына туура келген A матрицасынын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ өздүк маанилери жөнөкөй түзүлүштө болсо, анда (6.1.1) системасынын жалпы чыгарылышы*

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\alpha^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\alpha^2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\alpha^n =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \ldots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}\alpha_1^2\\ \ldots\\ \alpha_n^2\end{pmatrix} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\begin{pmatrix}\alpha_1^n\\ \ldots\\ \alpha_n^n\end{pmatrix} \qquad (6.1.17)$$

формуласы менен аныкталат. Мында $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ векторлору *A* матрицасынын өздүк векторлору, ал эми $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – эркин турактуу сандар.

Д а л и л д ө ө. Төмөнкүдөй жаңы белгисиз вектор-функцияны киргизели.

$$y(t) = Tz(t) \qquad (6.1.18)$$

Мында *T* матрицасы *A* матрицасын диагоналдык түргө «өткөрчү» матрица. (6.1.18)ди (6.1.2) ге коюп, жогорку лемманын негизинде

$$T\frac{dz(t)}{dt} = ATz(t)$$

системасын алабыз. Мындан барабардыктын эки жагын сол жагынан $T^{-1}$ ге көбөйтүп жана $T^{-1}AT = \Lambda$ барабардыгын эске алып,

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z \qquad (6.1.19)$$

системасын алабыз. (6.1.19) системасын ачып жазсак,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dz_1}{dt}\\ \ldots\\ \dfrac{dz_n}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \ldots\\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 z_1\\ \lambda_2 z_2\\ \ldots\ldots\\ \lambda_n z_n\end{pmatrix}$$

түрүндө жазылат. Мындан

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1; \frac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2, ..., \frac{dz_n}{dt} = \lambda_n z_n$$

деген бири-бирине байланышпаган $n$-теңдемесин алабыз. Бул теңдемелердин чыгарылыштары

$$z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t},\ z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, ...,\ z_n = c_n e^{\lambda_n t} \qquad (6.1.20)$$

формулалары менен аныкталары көрүнүп турат. Мында $c_1, c_2, ..., c_n$ эркин сандар. Анда

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + c_n e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6.1.21)$$

(6.1.21) формуласын (6.1.18)ге коюп жана

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^1; T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^2; \cdots; \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^n$$

барабардыктарын эске алып,

$$y(t) = Tz(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \alpha^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \alpha^2 + ... + c_n e^{\lambda_n t} \alpha^n$$

чыгарылышын алабыз.

**2-мисал.** Төмөндөгүдөй системанын жалпы чыгарылышын табууну талап кылалы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases} \qquad (6.1.22)$$

Бул системанын матрицасын түзсөк, анда ал

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

матрицасын берет.

Бул матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун 1-мисалда тапканбыз.

$$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3 \text{ жана } \alpha^1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha^2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha^3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Анда (6.1.17) формуласынын негизинде (6.1.22) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix}=c_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

формуласы менен аныкталат.

## § 6.2 Турактуу коэффициенттүү бир тектүү теңдемелер системасынын мүнөздөөчү теңдемеси комплекстүү тамырга ээ болгон учурдагы чыгарылышы

(6.1.6) мүнөздөөчү теңдемесинин тамырларынын ичинде комплексттүү $\lambda$ тамыры бар дейли, анда төмөндөгүдөй лемма орун алат.

*1-лемма.* Эгерде элементтери анык сандардан турган $A$ матрицасынын өздүк мааниси комплекстүү $\lambda$ саны болуп жана ага комплекстүү $\alpha_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ өздүк вектор-функциясы туура келсин. Анда $\lambda$ санынын түйүндөшү $\bar{\lambda}$ саны да $A$ матрицасынын өздүк мааниси болот жана ага өздүк түйүндөш вектор-функциясы туура келет.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\alpha=0$ барабардыгы орун алат. Мында $\alpha$ вектору $\lambda$ өздүк маанисине туура келген $A$ матрицасынын өздүк вектору. Жогорку барабардыктан түйүндөш барабардыгына өтсөк,

$$\left(\overline{A}-\overline{\lambda}E\right)\overline{\alpha}=0$$

барабардыгын алабыз. Бирок $A$ матрицасынын элементтери анык сандар болгондуктан, $A=\overline{A}$. Андыктан

$$\left(A-\overline{\lambda}E\right)\overline{\alpha}=0$$

барабардыгы келип чыгат. Демек, $\overline{\lambda}$ комплекстүү саны $A$ матрицасынын өздүк маанисин берет жана $\overline{\alpha}$ вектору $\overline{\lambda}$ өздүк маанисине туура келген өздүк векторлорду берет.

*2-лемма.* Эгерде (6.1.1) системасындагы $A$ матрицасынын өздүк мааниси комплекстүү λ саны болсо, анда комплекстүү $y=e^{\lambda t}\alpha$ вектор-функциясынын анык бөлүгү $\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\alpha)$ өзүнчө жана жалган бөлүгү $\mathrm{Im}(e^{\lambda t}\alpha)$ өзүнчө (6.1.1) системасынын чыгарылыштары болот. Мында $a$ вектору λ өздүк маанилерине туура келген $A$ матрицасынын өздүк вектору.

Д а л и л д ө ө.

$\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\alpha)$ векторун (6.1.2) системасына коюп, төмөнкүдөй барабардыкты алабыз:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}\,e^{\lambda t}\alpha)=A(\mathrm{Re}\,e^{\lambda t}\alpha),$$

мындан

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\alpha\right)-A\left(e^{\lambda t}\alpha\right)\right]=\mathrm{Re}\left[e^{\lambda t}\lambda\alpha-e^{\lambda t}A\alpha\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\,e^{\lambda t}\left[\left(\lambda\mathrm{E}-A\right)\alpha\right]=-\mathrm{Re}\,e^{\lambda t}\left[\left(A-\lambda E\right)\alpha\right]=0$$

барабардыгы келип чыгат. Мындан λ саны $A$ матрицасынын өздүк мааниси жана $a$ вектору $A$ матрицанын ошол λ өздүк маанисине туура келген өздүк вектору болгондуктан,

$$0\equiv 0$$

теңдештигин алабыз. Ушул эле жол менен $\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\alpha\right)$ вектору да (6.1.1) системасынын чыгарылышы болоорун көрсөтүүгө болот.

*Эскертүү.* Эгерде (6.1.1) системасындагы $A$ матрицасынын түйүндөш $\overline{\lambda}$ өздүк маанисине туура келген комплекстүү $\overline{y}=e^{\overline{\lambda}t}\overline{\alpha}$ вектор-функциясын алсак, анда анын чыныгы жана жалган бөлүктөрү

$$\mathrm{Re}\left(e^{\bar{\lambda}t}\alpha\right)=\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\alpha\right);\ \mathrm{Im}\left(e^{\bar{\lambda}t}\alpha\right)=-\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\alpha\right)$$

барабардыктарын канааттандырат. Андыктан $\bar{\lambda}$ өздүк маанисине да, (6.1.1) системасынын ошол эле $\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\alpha\right)$ жана $\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\alpha\right)$ чыгарылыштары туура келет.

(6.1.6) теңдемесинин тамырлары ар башка $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ анык сандарынан жана эки-экиден бири-бирине түйүндөш болгон $\lambda_{k+1}, \bar{\lambda}_{k+1}, \lambda_{k+2}, \bar{\lambda}_{k+2}...$ комплекстүү сандарынан турсун дейли. Анда $A$ матрицасынын бул өздүк маанилерине туура келген төмөндөгүдөй өздүк векторлор табылат.

$$\alpha^j=\begin{pmatrix}\alpha_1^j\\ \cdots\\ \alpha_n^j\end{pmatrix},\qquad (j=1,2,...,k),$$

$$\alpha^{k+1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{k+1}\\ \cdots\\ \alpha_n^{k+1}\end{pmatrix},\quad \bar{\alpha}^{k+1}=\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_{11}^{k+1}\\ \cdots\\ \bar{\alpha}_{nn}^{k+1}\end{pmatrix},\alpha^{k+2}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{k+2}\\ \cdots\\ \alpha_n^{k+2}\end{pmatrix},\bar{\alpha}^{k+2}=\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_{11}^{k+2}\\ \cdots\\ \bar{\alpha}_{nn}^{k+2}\end{pmatrix}\cdots$$

Бул учурда $A$ матрицасынын диагоналдык түрү § 6.1 деги теорема боюнча

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 00000...0\\ 0\lambda_1 0000...0\\ ..................\\ 00...\lambda_k 000...0\\ 00...0\lambda_{k+1}00...0\\ 00...00\bar{\lambda}_{k+1}0...0\\ ......................\end{pmatrix}\qquad (6.2.1)$$

формуласы менен аныкталат. Мында $T$ матрицасы өткөрүүчү матрица. Анын мамычалары

$$\alpha^j(j=1,2,...,k),\ \alpha^{k+1},\bar{\alpha}^{k+1},\alpha^{k+2},\bar{\alpha}^{k+2},...$$

өздүк векторлорунан турат. Бул учурда (6.1.1) системасынын (6.1.6) формуласы боюнча төмөндөгүдөй айрым чыгарылыштар туура келет.

$$y_1(t)=\alpha^1 e^{\lambda_1 t},\ y_2(t)=\alpha^2 e^{\lambda_2 t},\dots,y_k(t)=\alpha^k e^{\lambda_k t},\ y_{k+1}=\mathrm{Re}(\alpha^{k+1}e^{\lambda_{k+1}t}),$$
$$y_{k+2}=\mathrm{Im}(\alpha^{k+1}e^{\lambda_{k+1}t}),\ y_{k+3}=\mathrm{Re}(\alpha^{k+2}e^{\lambda_{k+2}t}),\ y_{k+4}=\mathrm{Im}(\alpha^{k+2}e^{\lambda_{k+2}t}),\dots$$

Анда § 6.1деги теорема боюнча (6.1.1) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\alpha^1+c_2e^{\lambda_2 t}\alpha^2+\dots+c_ke^{\lambda_k t}\alpha^k+c_{k+1}\mathrm{Re}(\alpha^{k+1}e^{\lambda_{k+1}t})+c_{k+2}\mathrm{Im}(\alpha^{k+1}e^{\lambda_{k+1}t})+$$
$$+c_{k+3}\mathrm{Re}(\alpha^{k+2}e^{\lambda_{k+2}t})+c_{k+4}\mathrm{Im}(\alpha^{k+2}e^{\lambda_{k+2}t})+\dots=c_1e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \cdots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix}+c_2e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}\alpha_1^2\\ \cdots\\ \alpha_n^2\end{pmatrix}+\dots$$
$$\dots+c_ke^{\lambda_k t}\begin{pmatrix}\alpha_1^k\\ \cdots\\ \alpha_n^k\end{pmatrix}+c_{k+1}\begin{pmatrix}\mathrm{Re} & \alpha_1^{k+1} & e^{\lambda_{k+1}t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{Re} & \alpha_n^{k+1} & e^{\lambda_{k+1}t}\end{pmatrix}+c_{k+2}\begin{pmatrix}\mathrm{Im} & \alpha_1^{k+1} & e^{\lambda_{k+1}t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{Im} & \alpha_n^{k+1} & e^{\lambda_{k+1}t}\end{pmatrix}+$$
$$+c_{k+3}\begin{pmatrix}\mathrm{Re} & \alpha_1^{k+2} & e^{\lambda_{k+1}t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{Re} & \alpha_n^{k+2} & e^{\lambda_{k+2}t}\end{pmatrix}+c_{k+4}\begin{pmatrix}\mathrm{Im} & \alpha_1^{k+2} & e^{\lambda_{k+2}t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{Re} & \alpha_n^{k+2} & e^{\lambda_{k+2}t}\end{pmatrix}+\dots$$

формуласы менен аныкталат.

Мында $c_1,c_2,\dots,c_k,c_{k+1},c_{k+2},c_{k+3},c_{k+4},\dots$ эркин турактуу сандар $\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^k,\alpha^{k+1},\alpha^{k+2}$ векторлору $A$ матрицасынын $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k,\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots$ өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлору.

Мисал.

$$\frac{dy_1}{dt}=2y_1(t)+y_2(t),$$
$$\frac{dy_2}{dt}=y_1(t)+3y_2(t)-y_3(t),\quad \text{же}\quad \frac{dy}{dt}=Ay(t) \qquad (6.2.3)$$
$$\frac{dy_3}{dt}=-y_1(t)+2y_2(t)+3y_3(t)$$

системасынын жалпы чыгарылышын табалы. Мында

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

1. $A$ матрицасынын өздүк маанилерин табабыз.

$$\det(A-\lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Барабардыктын сол жагындагы үчүнчү тартиптеги аныктагычты ачып жана λга карата топтоштурсак,

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$$

тещдемеси келип чыгат. Мындан $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3+i, \lambda_3 = 3-i$ деген тамырлары табылат да, алар $A$ матрицасын өздүк маанилерин берет.

2. А матрицасынын $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3+i, \lambda_3 = 3-i$ өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлорун табабыз:

$$\left(A-\lambda_j E\right)\alpha^j \equiv \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.2.4)$$

Бул системага биринчи кезекте $\lambda_1$=2 маанисин коюп,

$$(A-2E)\alpha^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.2.5)$$

системасын алабыз. Эгерде $A-2E$ матрицасынын рангын тапсак, анда $rang(A-2E) = 2$. Андыктан (6.2.4) системасы $3 - rang(A-2E) = 1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты тапсак, анда аны

$$\alpha^1 \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

деп алсак болот.

Эми $\lambda_2 = 3+i$ маанисин (6.2.3) системасына коюп,

$$\left(A-(3+i)E\right)\alpha^2 \equiv \begin{pmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 2 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.2.6)$$

системасын алабыз. $\left(A(3+i)E\right)$ матрицасынын рангын табалы.

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 2 & -i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -i & -1 \\ -1-i & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2i & -1-i \\ 0 & 2-i & -1-i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2-i & -1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Демек, $rang(A-(3+i)E)=2$ Андыктан (6.2.5) системасы $3-rang(A-(3+i)E)=1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты тапсак, анда

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2-i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 - i\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0, \\ (2-)\alpha_2^2 - (1+i)\alpha_3^2 - \alpha_3^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1 \\ i\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \\ \alpha_3^2 = 2-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1 \\ \alpha_3^2 = 2-i, \\ \alpha_2^2 = 1+i \end{cases} \Leftrightarrow \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Үчүнчү кезекте $\lambda_3 = 3-i$ маанисин (6.2.4) системасына коюп жана аны чыгарсак, анда лемма боюнча ал чыгарылышы,

$$\alpha^3 \equiv \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$$

векторун берет. Демек, өткөрүүчү $T$ матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1+i & 1-i \\ 1 & 2-i & 2+i \end{pmatrix} \tag{6.2.7}$$

формуласы менен аныкталат жана ал $A$ матрицасын

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

формуласы менен диагоналдык түргө алып келет. (6.2.2) формуласынын негизинде (6.2.3) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \operatorname{Re} \begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ (1+i)e^{(3+i)t} \\ (2-i)e^{(3+i)t} \end{pmatrix} + C_3 \operatorname{Im} \begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ (1+i)e^{(3+i)t} \\ (2-i)e^{(3+i)t} \end{pmatrix}$$

формуласы менен аныкталат. (6.2.9) чыгарылышындагы

$$\begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ (1+i)e^{(3+i)t} \\ (2-i)e^{(3+i)t} \end{pmatrix}$$

вектордун анык жана жалган бөлүктөрүн табалы:

$$\begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ (1+i)e^{(3+i)t} \\ (2-i)e^{(3+i)t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{it}(1+i) \\ e^{it}(2-i) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (\cos t + i\sin t)(1+i) \\ (\cos t + i\sin t)(2-i) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \\ 2\cos t + \sin t + i(2\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

Демек,

$$\operatorname{Re} \begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ e^{(3+i)t}(1+i) \\ e^{(3+i)t}(2-i) \end{pmatrix} = e^{3i} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix}; \operatorname{Im} \begin{pmatrix} e^{(3+i)t} \\ e^{(3+i)t}(1+i) \\ e^{(3+i)t}(2-i) \end{pmatrix} = e^{3i} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - i\sin t \\ 2\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Андыктан (6.2.9) чыгарылышы

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix} \quad (6.2.10)$$

## § 6.3. Туруктуу коэффициенттүү бир тектүү теңдемелер системасынын мүнөздөөү теңдемеси эселүү тамырга ээ болгон учурдагы чыгарылышы

*1. Матрицасы жөнөкөй түзүлүштө болгон учур.*

(6.1.6) мүнөздөөчү теңдемесинин тамырларынын ичинде эселүү тамыры бар болсун дейли. $\lambda_k$ тамыры эселүү болсун дейли. Бул параграфта окулуучу теорияны өтө татаалдатпоо максатында төмөнкүдөй мүмкүнчүлүккө жол беребиз. (6.1.6) мүнөздөөчү теңдемесинин бир гана $m$ эселүү тамыры болсун дейли. Мында $k$ белгиленген жылбас индекс. Бизге сызыктуу алгебрадан белгилүү болгондой, эгерде $rang(A-\lambda_R E)=n-m$ болсо, анда $A$ матрицасынын сызыктуу көз каранды эмес өздүк векторлору табылат да, $A$ матрицасы диагоналдык түргө алынып келинүүчү жөнөкөй түзүлүштөгү матрица болот. Бул учурда $A$ матрицасынын диагоналдык формасы

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1\,000\cdots00 \\ 0\,\lambda_2 00\cdots00 \\ ------- \\ 0\,0\cdots\lambda_k 0\cdots00 \\ -------- \\ 00\ \cdots 0\lambda_k\cdots00 \\ 00\ \cdots 0\lambda_{k+1}\cdots00 \\ ---------- \\ 00\ \cdots 0\lambda_{n-m}-0\cdots00 \end{pmatrix} \tag{6.3.1}$$

түрүндө жазылат. Демек, (6.1.1) системасы 6.1. параграфта караган учурга дал келет да, ал системанын жалпы чыгарылышы

$$Y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix}+\ldots+C_{Rr}e^{\lambda_R t}\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots\\ \alpha_n^R\end{pmatrix}+\ldots+C_{R+m}e^{\lambda_R t}\begin{pmatrix}\alpha_1^{R+m}\\ \vdots\\ \alpha_n^{R+m}\end{pmatrix}+$$

$$+C_{R+m+1}e^{\lambda_{R+1}t}\begin{pmatrix}\alpha_1^{R+m+1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{R+m+1}\end{pmatrix}+\ldots+C_{n-m}e^{\lambda n-mt}\begin{pmatrix}\alpha_1^{n-m}\\ \vdots\\ \alpha_n^{n-m}\end{pmatrix}$$

формуласы менен аныкталат. Мында

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_1^k\\ \vdots\\ \alpha_n^k\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_1^{k+m}\\ \vdots\\ \alpha_n^{k+m}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_1^{k+m+1}\\ \vdots\\ \alpha_n^{k+m+1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_1^{n-m}\\ \vdots\\ \alpha_n^{n-m}\end{pmatrix}$$

векторлору $A$ матрицасынын өздүк векторлору, ал эми $C_1,\ldots C_k,\ldots C_{k+m},C_{k+m+1}C_{n+m}$ эркин турактуу сандар.

**1-мисал.**

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=4y_1-y_2-y_3,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1+2y_2-y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=y_1-y_2+2y_3,\end{cases}$$

же

$$\frac{dy}{dt}=Ay(t) \tag{6.3.3}$$

системасынын жалпы чыгарылышын табалы. Мында

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$A$ матрицасынын өздүк маанилерин табабыз.

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}4-\lambda&-1&-1\\1&2-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Барабардыктын сол жагындагы үчүнчү тартиптеги аныктагычты ачып, λга карата топтоштурсак, $\lambda^3-8\lambda^2+21\lambda-18=0$ теңдемеси келип чыгат. Мындан $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=3$ тамырлары табылат жана алар матрицанын өздүк маанилерин берет. Жогоруда көрүнүп тургандай $\lambda_2=\lambda_3=3$ эки эселүү тамыр. $A$ матрицанын $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=3$ өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлорун табабыз.

$$(A-\lambda E)\alpha^j \equiv \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.4)$$

Бул системага, биринчи кезекте, $\lambda_1 = 2$ маанисин коюп,

$$(A-2E)\alpha^1 \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.5)$$

системасын алабыз. Эгерде *A–2E* матрицасынын рангын тапсак, анда $rang(A-2E)=2$. Андыктан (6.3.5) системасы $3-rang(A-2E)=1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты таап,

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ өздүк векторун алабыз.

(6.3.4) системасына $\lambda_2 = 3$ маанисин коюп,

$$(A-3E)\alpha^2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.6)$$

системасын алабыз. Эгерде *A-3E* матрицасынын рангын тапсак, анда $rang(A-2E)=1$. Андыктан (6.3.6) системасы $3-rang(A-2E)=2$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылыштарды таап,

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 \\ \alpha_2^3 \\ \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

өздүк векторлорун алабыз. Ошентип (6.3.3) системасынын жалпы чыгарылышын (6.3.2) формуласы менен жазууга өздүк вектордун саны жеткиликтүү болду. Бул учурда өткөрүүчү *T* матрицасы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3.7}$$

формуласы менен аныкталат, жана ал $A$ матрицасын

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

формуласы менен диагоналдык түргө алып келет. (6.3.2) формуласынын негизинде (6.3.3) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

формуласы менен аныкталат.

*2. Матрицасы жордандык түзүлүштө болгон учур.* Эгерде (6.1.6) мүнөздөөчү теңдемесинин $m$–эселүү $\lambda_R$ тамыры үчүн $rang(A-\lambda_R) > n-m$ болсо, анда $A$ матрицасынын $\lambda_R$ тамырына туура келген

$$n - rang(A-\lambda_R) < n-(n-m) = m$$

сандагы сызыктуу көз каранды эмес өздүк эмес векторлору табылат да, $A$ матрицасы диагоналдык түргө алынып келинбейт. Андыктан (6.1.1) системасынын жалпы чыгарылышын (6.2.2) формуласы менен аныктоого мүмкүн эмес.

Төмөндө мындан ары керек болуучу сызыктуу алгебрадан белгилүү болгон кай бир түшүнүктөрдү жана теоремаларды далилдөөсүз эске салабыз.

*1-Аныктама.* Төмөндөгүдөй $m$ өлчөмдүү

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1\cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots & \lambda \end{pmatrix} \tag{6.3.8}$$

жордандык бөлүк деп аталат. (6.3.8)дин мүнөздөөчү теңдемеси

$$|J - \lambda E| = 0$$

жалгыз гана $m$ эселүү өздүк мааниге ээ. Буга туура келген өздүк векторлорун тапсак, анда

$$(J-\lambda_R E)\alpha = 0$$

системасын чыгарабыз. Мында $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ вектор.

Жогорку системаны ачып жазсак, анда ал

$$\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_R & 1 & 0\,0\,0\cdots 0\,0 \\ 0 & \lambda-\lambda_R & 1\,0\,0\cdots 0\,0 \\ \hline 0 & 0 & 0\,0\,0\cdots \lambda-\lambda_R\; 1 \\ 0 & 0 & 0\,0\,0\cdots 0\,\lambda-\lambda_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0$$

түрүндө болот.

Мындан

$$(\lambda-\lambda_R)\alpha_1+\alpha_2=0; \quad (\lambda-\lambda_R)\alpha_3=0,\dots,(\lambda-\lambda_R)\alpha_m=0$$

барабардыктарын алабыз. $(\lambda-\lambda_R)\neq 0$ болгондуктан, $a_2$=0, $a_3$=0,..., $a_m$=0, $a_2$=1 келип чыгат. Демек, $J$ жордандык блок $\lambda_R$ өздүк маанисине туура келген жалгыз гана

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ деген өздүк векторго ээ болот.

*Эскертүү:* Жогорку $J(\lambda)$ жордандык блок $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha^1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\alpha^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\alpha^{m-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

векторуна төмөндөгүдөй формулалар менен аракет кыларын оңой эле текшерүүгө болот.

$$(J-\lambda_R E)\alpha=0,(J-\lambda_R E)\alpha^1=\alpha,(J-\lambda_R E)\alpha^2=\alpha^1,...,$$
$$(J-\lambda_R E)\alpha^{m-1}=\alpha^{m-2} \qquad (6.3.9)$$

*Аныктама.* В матрицасы үчүн

$$(B-\lambda E)e_1=0;(B-\lambda E)e_2=e_1,...,(B-\lambda E)e_m=e_{m-1}$$

формулалары менен табылган $(e_1,e_2,...,e_m)$ векторлору $B$ матрицасынын $\lambda$ өздүк маанисине туура келген жордандык чынжырчасы деп аталат.

Мында $e_1$ өздүк вектор, ал эми $e_2,e_3,...,e_m$ жардамчы векторлор деп аталат. Мисалы, векторлору $J(\lambda)$– жордандык болсун, $\lambda_R$ өздүк маанисине туура келген жордандык чынжырчасы болот.

Бул пунктта мындан аркы окулуучу теорияны өтө татаалдатпоо максатында (6.1.1) системасынын $A$ матрицасынын $m$ эселүү $\lambda_R$ тамыры

$$rang(A-\lambda_R E)=n-1>n-m$$

үчүн мүмкүнчүлүгүнө жол берели. Анда сызыктуу алгебранын теориясы боюнча $(A-\lambda_R)\alpha=0$ системасы $n-(n-1)=1<m$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот, б.а. бир гана өздүк векторго ээ болот. (6.1.1) системасындагы $A$ матрицасынын $m$ эселүү $\lambda_R$ өздүк маанисине туура келген жордандык чынжырчасын табабыз:

$$(A-\lambda_R E)\alpha^R=0,(A-\lambda_R E)\alpha^{R+1}=\alpha^R,...,(A-\lambda_R E)\alpha^{R+m-1}=\alpha^{R+m-2}$$

системаларын чыгарып,

$$\alpha^R=\begin{pmatrix}\alpha_1^R\\\vdots\\\alpha_n^R\end{pmatrix},\quad \alpha^{R+1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{R+1}\\\vdots\\\alpha_n^{R+1}\end{pmatrix},...,\alpha^{R+m-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{R+m-1}\\\vdots\\\alpha_n^{R+m-1}\end{pmatrix}$$

векторлорун табабыз.

Мында $\alpha^R$ өздүк вектор, ал эми $\alpha^{R+1},...,\alpha^{R+m-1}$ жардамчы векторлор.

*Лемма* (6.1.1) системасындагы $A$ матрицасынын $m$ эселүү $-\lambda_R$ өздүк маанисине туура келген өздүк жана жардамчы $\alpha^R,\alpha^{R+1},...,\alpha^{R+m-1}$ векторлор сызыктуу көз каранды эмес болот.

Д а л и л д ө ө. Төмөндөгүдөй барабардыкты карайбыз:

$$\beta_0\alpha^R+\beta_1\alpha^{R+1}+...+\beta_{m-1}\alpha^{R+m-1}=0 \qquad (6.3.10)$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\qquad \alpha'=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\alpha^{m-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

жана барабардыктын эки жагына $A-\lambda_R E$ матрицасы менен аракет кылсак,

$$\beta_0(A-\lambda_R E)\alpha^R+\beta_1(A-\lambda_R E)\alpha^{R+1}+...+\beta_{m-1}(A-\lambda_R E)\alpha^{R+m}=0$$

барабардыгын алабыз. Эгерде (6.3.9) барабардыктарын эске алсак, анда

$$\beta_1\alpha^R+...+\beta_{m-1}\alpha^{R+m-2}=0 \qquad (6.3.11)$$

барабардыгы келип чыгат. Бул барабардыкта (6.3.10) векторлорунун бир санга кем векторлору кирет. Ошондуктан (6.3.12) барабардыгынан коэффициенттеринин бардыгы нөлгө барабар:

$$\beta_1=\beta_2=...=\beta_{m-1}=0;$$

Анда (6.3.11) барабардыгынан

$$\beta_0\alpha^R=0$$

барабардыгы келип чыгат. Мындан $\alpha^R$ өздүк вектор болгондуктан, $\beta_0=0$ келип чыгат. Ошентип (6.3.11) барабардыгы $\beta_1=\beta_2=...=\beta_{m-1}=0;$ болгондо гана аткарылат. Андыктан $\alpha^R,\alpha^{R+1},...,\alpha^{R+m-1}$ сызыктуу көз каранды эмес векторлор болушат. Жогорку 1-аныктамадагы эскертүүнүн негизинде (6.3.9) жордандык чынжырга

$$J(\lambda_R)=\begin{pmatrix} \lambda_R & 1 & 000\cdots 000 \\ 0 & \lambda_R & 100\cdots 000 \\ \hline 0 & 0 & 000\cdots \lambda_R 10 \\ 0 & 0 & 000\cdots 0\lambda_R 1 \\ \hline 0 & 0 & 000\cdots\ \ 00\lambda_R \end{pmatrix} \qquad (6.3.12)$$

жордандык блок туура келет. Сызыктуу алгебрада белгилүү болгон төмөнкүдөй теоремага токтолобуз.

*Теорема. Эгерде А матрицасынын бир $\lambda_R$ өздүк мааниси т эселүү болуп жана ага бир гана т өлчөмдүү (6.3.12) түрүндөгү жордандык блок туура келсе, ал эми А матрицасынын калган өздүк маанилери бири-бирине барабар болбогон пхп өлчөмдүү Т матрицасы жашап, ал А матрицасын диагоналдык түргө алып келет,*

$$T^{-1}AT = Л \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J(\lambda_R) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_{n-m} \end{pmatrix} \qquad (6.3.13)$$

Мында $\lambda_1 \quad \lambda_2,\dots,\lambda_R,\dots,\lambda_{n\ m}$ $A$ матрицасынын өздүк маанилери, ал эми $T$ матрицасы «өткөрүүчү» матрица деп аталат да, анын мамычалары $A$ матрицасынын калган өздүк жана жардамчы векторлорунан турат.

*3-Аныктама:* (6.3.13) формуласы менен аныкталган блоктуу матрица $A$ матрицасынын жордандык нормалдуу формасы деп аталат.

**2-мисал.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицасынын жордандык нормалдуу формасын аныктайлы.

1. Берилген матрицанын өздүк маанисин табабыз:

$$\det(A-\lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Барабардыктын сол жагындагы үчүнчү тартиптеги аныктагычты ачып жана λга карата топтоштурсак,

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

теңдемеси келип чыгат. Мындан $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ деген тамырлар табылат да, алар $A$ матрицасынын өздүк маанилерин берет. Мында көрүнүп тургандай $\lambda_2 = \lambda_3 =$ эки эселүү тамыр.

2. $A$ матрицасынын $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ өздүк маанилерине туура келген өздүк векторлорун табабыз.

$$(A-\lambda_j E)\alpha^j \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda_j & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_j & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_j \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j \\ \alpha_3^j \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.14)$$

Бул системага $\lambda_1 = 2$ маанисин коюп,

$$(A-\lambda E)\alpha^j \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.15$$

системасын алабыз. Эгерде $A-2E$ матрицасынын рангын тапсак, $rang(A-2E) = 2$. Анда (6.3.15) системасы $3 - rang(A-2E) = 1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты таап,

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

өздүк векторун алабыз.

(6.3.14) системасына $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ маанисин коюп,

$$(A-E)\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3.16)$$

системасын алабыз. Эгерде $A–E$ матрицасынын рангын тапсак, анда $rang(A-2E)=2$; (6.3.16) системасы $3-rang(A-2E)=1$ сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышка ээ болот., Бул учурда эки эселүү $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ өздүк маанисине туура келген өздүк вектордун саны бирөө гана. Андыктан $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ өздүк маанисине $A$ матрицасынын жордандык чынжырчасы туура келет. Ал чынжырчаны (6.3.9) формуласы менен таап,

$$(A-E)\alpha^2 = 0, (A-E)\alpha^3 = \alpha^2 \qquad (6.3.17)$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ жана } \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

векторлорун алабыз.

Мында $\alpha^2$ өздүк вектор, ал эми $\alpha^3$ жардамчы вектор. Бул мисалда $A$ матрицасынын $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ өздүк маанисине туура келген жордандык чынжырчанын жордандык блогу

$$J(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ түрүндө болот.}$$

Өткөрүүчү $T$ матрицасы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (6.3.18)$$

формуласы менен аныкталат жана ал $A$ матрицасын

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.3.19)$$

формуласы менен жордандык нормалдуу формага алып келет. Ишеничтүү болуш үчүн (6.3.9) формуласы менен текшерели. Ал үчүн биринчи кезекте $T$ матрицасы аркылуу тескери $T^{-1}$ матрицасын тапсак болот.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Анда матрицаны матрицага көбөйтүү эрежесинин негизинде

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

*Теорема: 2. Эгерде $A$ матрицасынын бир $\lambda_K$ өздүк мааниси $m$ эселүү болуп жана ага бир гана $m$ өлчөмдүү (6.3.12) түрүндөгү жордандык блок туура келсе, ал эми $A$ матрицасынын калган өздүк маанилери бири-бирине барабар болбогон анык сандар болсо, анда (6.1.1) системасынын жалпы чыгарылышы*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\alpha^1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\alpha^2 + \ldots + C_R e^{\lambda_R t}\alpha^R + C_{R+1}e^{\lambda_R t}(\alpha^{R+1} + \frac{t}{1!}\alpha^R) + \ldots$$

$$+ C_{R+m-1}e^{\lambda_R t}(\alpha^{R+m-1} + \frac{t}{1!}\alpha^{R+m-2} + \ldots + \frac{t^{R-1}\alpha^R}{(R-1)!}) + \ldots + C_{n-m}e^{\lambda_{n-m}t}\alpha^{(n-m)t}$$

формуласы менен аныкталат.

Д а л и л д ө ө: Төмөндөгүдөй жаңы белгисиз вектор-функцияны киргизели

$$y(t) = Tz(t) \tag{6.3.21}$$

Мында $T$ матрицасы $A$ матрицасын жордандык түрдө «өткөрүүчү» матрица (6.1.2)ге коюп, төмөндөгүдөй системаны алабыз:

$$T\frac{dz(t)}{dt} = ATz(t)$$

Барабардыктын эки жагын $T^{-1}$ матрицасына көбөйтүп жана $T^{-1}AT = \Lambda$ барабардыгын эске алып,

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z \tag{6.3.22}$$

системасын алабыз. Бул системаны ачып жазсак,

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{dz_1}{dt} \\
\dfrac{dz_2}{dt} \\
\vdots \\
\dfrac{dz_R}{dt} \\
\dfrac{dz_{R+1}}{dt} \\
\vdots \\
\dfrac{dz_{R+m-1}}{dt} \\
\dfrac{dz_{R+m}}{dt} \\
\vdots \\
\dfrac{dz_n}{dt}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & \\
& \lambda_2 & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & \begin{matrix} \lambda_R\,1\,0\ldots 0\,0 \\ 0\,\lambda_R\,1\ldots 0\,0 \\ \text{-----------} \\ 0\,0\,0\ldots \lambda_R\;0 \\ 0\,0\,0\ldots\; 0\,\lambda_R \end{matrix} & \\
& & & & \ddots \\
& & & & & \lambda_{n-m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_R \\ z_{R+1} \\ \vdots \\ z_{R+m-1} \\ z_{R+m} \\ z_n
\end{pmatrix}
$$

түрүндө жазылат. Мындан матрицаны матрицага көбөйтүү жана эки вектор мамычалардын барабардыгы эрежелеринин негизинде төмөндөгүдөй

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1; \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2; \\ --------- \\ \dfrac{dz_R}{dt} = \lambda_R z_R + z_{R+1}; \\ \dfrac{dz_{R+1}}{dt} = \lambda_R z_{R+1} + z_{R+2}, \\ -------------- \\ \dfrac{dz_{R+m-1}}{dt} = \lambda_R z_{R+m-1} + z_{R+m} \\ \dfrac{dz_{R+m}}{dt} = \lambda_R z_{R+1}, \\ ------------ \\ \dfrac{dz_n}{dt} = \lambda_{n-m} z_n \end{cases}$$

системасын алабыз. Бул системаны төмөндөн жогору карай чыгарсак, төмөндөгүдөй чыгарылыштар келип чыгат:

$$\begin{pmatrix} z_n = C_n e^{\lambda_{n-m}t} \\ ---------- \\ z_{R+m} = C_{R+m}e^{\lambda_R t} \\ z_{R+m-1} = e^{\lambda_R t}\left(C_{R+m-1} + \frac{t}{1!}C_{R+m}\right) \\ -------------------- \\ z_{R+1} = e^{\lambda_R t}\left(C_{R+1} + \frac{t}{1!}C_{R+2} + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}C_{R+m}\right) \\ z_R = e^{\lambda_R t}\left(C_R + \frac{t}{1!}C_{R+1} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}C_{R+m}\right) \\ ------------------------ \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_R t} \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_R t} \end{pmatrix}$$

Мында $C_1, C_2 \ldots C_n$ – эркин турактуу сандар. Анда

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_R \\ z_{R+1} \\ \vdots \\ z_{R+m-1} \\ z_{R+m} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n e^{\lambda_1 t} \\ C_n e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_R t}\left(C_R + \frac{t}{1!}C_{R+1} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}C_{R+m}\right) \\ e^{\lambda_R t}\left(C_R + \frac{t}{1!}C_{R+2} + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}C_{R+m}\right) \\ ------------------------ \\ e^{\lambda_R t}\left(C_{R+m-1} + \frac{t}{1!}C_{R+m}\right) \\ e^{\lambda_R t}C_{m+R} \end{pmatrix} \qquad (6.3.23)$$

(6.3.23) туюнтмасын (6.3.21) формуласына коюп, төмөнкүдөй чыгарылышты алабыз.

$$y = Tz = \begin{pmatrix} \alpha_1^1\alpha_1^2 \cdots \alpha_1^R\alpha_1^{R+1} \cdots \alpha_1^{R+m-1}\alpha_1^{R+m} \cdots \alpha_1^n \\ \alpha_2^1\alpha_2^2 \cdots \alpha_2^R\alpha_2^{R+1} \cdots \alpha_2^{R+m-1}\alpha_2^{R+m} \cdots \alpha_2^n \\ \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \\ \alpha_R^1\alpha_R^2 \cdots \alpha_R^R\alpha_R^{R+1} \cdots \alpha_R^{R+m-1}\alpha_R^{R+m} \cdots \alpha_R^n \\ \alpha_{R+1}^1\alpha_{R+1}^2 \cdots \alpha_{R+1}^R\alpha_{R+1}^{R+1} \cdots \alpha_{R+1}^{R+m-1}\alpha_{R+1}^{R+m} \cdots \alpha_{R+1}^n \\ \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \\ \alpha_{R+m-1}^1\alpha_{R+m-1}^2 \cdots \alpha_{R+m-1}^R\alpha_{R+m-1}^{R+1} \cdots \alpha_{R+m-1}^{R+m-1}\alpha_{R+m-1}^{R+m} \cdots \alpha_{R+m-1}^n \\ \alpha_{R+m}^1\alpha_{R+m}^2 \cdots \alpha_{R+m}^R\alpha_{R+m}^{R+1} \cdots \alpha_{R+m}^{R+m-1}\alpha_{R+m}^{R+m} \cdots \alpha_{R+m}^n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n^1\alpha_n^2 \cdots \alpha_n^R\alpha_n^{R+1} \cdots \alpha_n^{R+m-1}\alpha_n^{R+m} \cdots \alpha_n^n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t} \\ C_2e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_R t}\left(C_R + \frac{t}{1!}C_{R+1} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}C_{R+m}\right) \\ e^{\lambda_R t}\left(C_R + \frac{t}{1!}C_{R+2} + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}C_{R+m}\right) \\ \text{-----------------------} \\ e^{\lambda_R t}\left(C_{R+m-1} + \frac{t}{1!}C_{R+m}\right) \\ e^{\lambda_R t}C_{m+R} \\ \vdots \\ e^{\lambda_R t}C_R \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix}
\alpha_1^1\alpha_1^2\cdots\alpha_1^R\alpha_1^{R+1}\cdots\alpha_1^{R+m-1}\alpha_1^{R+m}\cdots\alpha_1^n \\
\alpha_2^1\alpha_2^2\cdots\alpha_2^R\alpha_2^{R+1}\cdots\alpha_2^{R+m-1}\alpha_2^{R+m}\cdots\alpha_2^n \\
\ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots \\
\alpha_R^1\alpha_R^2\cdots\alpha_R^R\alpha_R^{R+1}\cdots\alpha_R^{R+m-1}\alpha_R^{R+m}\cdots\alpha_R^n \\
\alpha_{R+1}^1\alpha_{R+1}^2\cdots\alpha_{R+1}^R\alpha_{R+1}^{R+1}\cdots\alpha_{R+1}^{R+m-1}\alpha_{R+1}^{R+m}\cdots\alpha_{R+1}^n \\
\ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \ddots \\
\alpha_{R+m-1}^1\alpha_{R+m-1}^2\cdots\alpha_{R+m-1}^R\alpha_{R+m-1}^{R+1}\cdots\alpha_{R+m-1}^{R+m-1}\alpha_{R+m-1}^{R+m}\cdots\alpha_{R+m-1}^n \\
\alpha_{R+m}^1\alpha_{R+m}^2\cdots\alpha_{R+m}^R\alpha_{R+m}^{R+1}\cdots\alpha_{R+m}^{R+m-1}\alpha_{R+m}^{R+m}\cdots\alpha_{R+m}^n \\
\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\
\alpha_n^1\alpha_n^2\cdots\alpha_n^R\alpha_n^{R+1}\cdots\alpha_n^{R+m-1}\alpha_n^{R+m}\cdots\alpha_n^n
\end{pmatrix} *
$$

$$
C_1e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+C_2e^{\lambda t}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\left(C_R+\frac{t}{1!}C_{R+1}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)}C_{R+m}\right)e^{\lambda_R t}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+
$$

$$
+\left(C_{R+1}+\frac{t}{1!}C_{R+2}+\ldots+\frac{t^{m-2}}{(m-2)}C_{R+m}\right)e^{\lambda t}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\left(C_{R+m-1}+\frac{t}{1!}C_{R+m}\right)e^{\lambda t}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+C_{R+m-1}e^{\lambda t}+
$$

$$+\left(C_R+\frac{t}{1!}C_{R+1}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)}C_{R+m}\right)e^{\lambda_R t}+\left(C_{R+1}+\frac{t}{1!}C_{R+2}+\ldots+\frac{t^{m-2}}{(m-2)}C_{R+m}\right)e^{\lambda_R t}\alpha^{R+1}+\ldots+$$

$$+\left(C_{R+m-1}+\frac{t}{1!}C_{R+m}\right)e^{\lambda_R t}\alpha^{R+m-1}+C_{R+m-1}e^{\lambda_R t}\alpha^{R+m}+\ldots+C_n e^{\lambda_R t}\alpha^n=C_1e^{\lambda_1 t}\alpha^1+C_2e^{\lambda_2 t}\alpha^2+\ldots+$$

$$+C_Re^{\lambda_R t}\alpha^R+C_{R+1}e^{\lambda_R t}\left(\alpha^{R+1}+\frac{t}{1!}\alpha^R\right)+\ldots+C_{R+m-1}e^{\lambda_R t}\left(\alpha^{R+m-1}+\frac{t}{1!}\alpha^{R+m-2}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\alpha^R\right)+C_{R+m}e^{\lambda_R t}\left(\alpha^{R+m}+\frac{t}{1!}\alpha^{R+m-1}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\alpha^R\right)+\ldots+C_ne^{\lambda_{n-m} t}\alpha^n$$

Теорема толугу менен далилденди.

Мисал.

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1-y_2+y_3\\[2mm] \dfrac{dy_1}{dt}=y_1+y_2-y_3 \qquad \text{же} \qquad \dfrac{dy}{dt}=Ay\\[2mm] \dfrac{dy_1}{dt}=-y_2+2y_3\end{cases}$$

Системасынын жалпы чыгарылышын табалы. Мында

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\qquad \frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dy_1}{dt}\\[2mm]\dfrac{dy_2}{dt}\\[2mm]\dfrac{dy_3}{dt}\end{pmatrix}$$

Биз бул матрицанын өздүк маанилерин, өздүк векторлорун жана жардамчы векторлорун 2-мисалда тапканбыз:

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1 \text{ жана } \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix},$$

Мындан тышкары 2-мисалда жогорку $A$ матрицасынын «өткөрүүчү»

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ матрицасын таап, $A$ матрицасынын жордандык нормалдуу формасын $T^{-1}AT = \Lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ тапканбыз. Анда (6.3.24) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (6.3.25)$$

формуласы менен аныкталат.

Мындан

$$y_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 t e^{t}$$

$$y_2(t) = c_2 e^{t} - 2c_3 e^{t} + c_3 t e^{t}$$

$$y_3(t) = c_1 e^{2} + c_2 e^{t} + c_3 e^{t} + c_3 e^{t} t$$

## § 6.4. Турактуу коэффициенттүү бир тексиз теңдемелер системасын, турактууларды вариациялоо ыкмасы менен чыгаруу

Төмөндөгүдөй сызыктуу бир тексиз теңдемелер системасын карайлы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n + f_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{12} y_1 + \ldots + a_{2n} y_n + f_2(t), \qquad a < t < b \qquad (6.4.1) \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n11} y_1 + \ldots + a_{nm} y_n + f_n(t) \end{aligned}$$

же матрицалык түрдө

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t) \qquad (6.4.2)$$

Мында $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ берилген белгилүү вектор-функция.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

белгисиз изделүүчү вектор-функция.

*ЛЕММА*. (6.4.5) системасынын жалпы чыгарылышы, ошол (6.4.1) системасына туура келген бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы менен өзүнүн кандайдыр бир айрым чыгарылышынын суммасынан турат, б.а. эгерде $y^1, y^2, \ldots, y^n$ вектор-функциялары (6.4.1) системасына туура келген бир тектүү теңдемелер системасынын фундаменталдуу чыгарылыштар системасы болсо, анда (6.4.1) системасынын жалпы чыгарылышы:

$$y(t)=\sum_{R=1}^{n} C_R y_R + y^*(t) \tag{6.4.3}$$

формуласы менен аныкталат. Мында $\sum_{R=1}^{n} C_R y_R$ – бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы, $y^*(t)$ – бир тексиз теңдемелер системасынын кандайдыр бир айрым чыгарылышы.

Д а л и л д ө ө: (6.4.3) суммасын (6.4.2) системасына койсок,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{R=1}^{n} C_R y^R + y^*\right] = A\left[\sum_{R=1}^{n} C_R y^R + y^*\right] + f(t), \sum_{R=1}^{n} C_R\left[\frac{dy^R}{dt} - Ay^R\right] +$$

$$+\frac{dy^*}{dt} - Ay^* = f(t) \tag{6.4.4}$$

теңдештиги келип чыгат. Демек, (6.4.4) суммасы (6.4.2) системасынын чыгарылышын берет. Эгерде $C_R$ турактуу сандар болгондо, төмөнкү функция

$$y(t)=\sum_{R=1}^{n} C_R y_R \tag{6.4.5}$$

(6.4.1)ге туура келген бир тектүү системанын жалпы чыгарылышы болот. Бул формуладагы $C_R$, $R=1,2,...,n$ турактууларын $t$ аргументинен көз каранды деп эсептеп, $C_R,(t)$ функцияларын

$$y^*(t)=\sum_{R=1}^{n} C_R y_R \tag{6.4.6}$$

(6.4.6) функциясы (6.4.1) системасынын айрым чыгарылышын бере тургандай кылып тандап алабыз. (6.4.6) барабардыгынан туундусун тапсак,

$$\frac{dy^*(t)}{dt}=\left[\sum_{R=1}^{n} C'_R(t)y_R(t)+C_R(t)\frac{dy_R}{dt}\right]$$

$y^*(t),\dfrac{dy^*}{dt}$ функцияларын (6.4.2) системасына коюп, төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$\left[\sum_{R=1}^{n} C_R\frac{dy_R}{dt}+C'_R y_R(t)\right]-\sum_{R=1}^{n} C_R(t)Ay_R(t)=\sum_{R=1}^{n} C_R\left[\frac{dy_R}{dt}-Ay_R\right]+$$

$$+\sum_{R=1}^{n} C'_R(t)y^R(t)=\sum_{R=1}^{n} C'_R(t)y_R(t)=f(t) \tag{6.4.7}$$

(6.4.7) системасы $C_R^1(t)$ карата сызыктуу алгебралык система жана анын негизги аныктагычы сызыктуу көз каранды эмес $y^1,y^2,...,y^n$ функцияларынын вронскианын берет. Андыктан ал нөлгө барабар эмес. Демек, (6.4.7) системасы $C_R(t)$ функцияларына карата жалгыз чыгарылышка ээ:

$$C'_R(t)=\phi_R(t),\quad R=1,2,...,n \tag{6.4.8}$$

$f(t),Y_K(t)$ функциялары үзгүлтүксүз болгондуктан, (6.4.8) формуласындагы $\phi_R(t)$, функциясы да үзгүлтүксүз болот. (6.4.8) барабардыгын интегралдап, төмөнкү барабардыкты алабыз.

$$C_R(t)=\int\phi_R(t)dt+\gamma_R,\quad R=1,2,...,n \tag{6.4.9}$$

(6.4.9) маанилерин (6.4.6) барабардыктарына карата коюп, $y^*(t)$ айрым чыгарылышын табабыз.

Мисал:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2 + e^t \\ \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2 \end{cases} \qquad (6.4.10)$$

Системанын жалпы чыгарылышын табалы. (6.4.10) системасына туура келген бир тектүү системаны карайбыз.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2 \end{cases} \qquad (6.4.11)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасынын өздүк маанилери $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,$ сандары, ал эми бул өздүк маанилерге туура келген өздүк векторлор

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ болот.}$$

Фундаменталдуу чыгарылыштар системасын

$$y^1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y^2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

вектор функциялары түзөт. Андыктан (6.4.11) бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t) = C_1 y^1(t) + C_2 y^2(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (6.4.12)$$

формуласы менен аныкталат.
(6.4.10) бир тексиз теңдемелер системасынын айрым чыгарылышын

$$y^*(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (6.4.13)$$

формуласы менен издейбиз.

Мында $C_1^1(t),\ \ C_2^1(t)$ туундуларына карата

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{-t} = e^t \\ C_1'(t)e^{3t} - C_2'(t)e^{-t} = 0, \end{cases}$$

системасын алабыз. Бул системанын аныктагычы вронскианды берет.

$$W=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix}=-2e^{2t}\neq 0$$

андыктан система чыгарылышка ээ болот. Системаны чыгарсак,

$$C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-2t},\quad C_2'(t)=\frac{1}{2}e^{2t} \qquad (6.4.14)$$

чыгарылыштарын алабыз. (6.5.14) барабардыктарын интегралдасак,

$$C_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-2t},\qquad C_2(t)=\frac{1}{4}e^{2t} \qquad (6.4.15)$$

барабардыктары келип чыгат. (6.5.15) маанилерин (6.4.13) барабардыгына коюп,

$$y^*(t)=-\frac{1}{4}e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

айрым чыгарылышын алабыз. (6.4.10) системасынын жалпы чыгарылышы

$$y(t)=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+e^{t}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

формуласы менен аныкталат.

## § 6.5. Кадимки дифференциалдык теңдемелер системасынын биринчи интегралы

Төмөнкүдөй теңдемелер системасын карайбыз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ &\text{-------------------}\\ \frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.1)$$

Кандайдыр $D$ –туюк областында $f_1, f_2, ..., f_n$ функциялары жана алардын $y_1, y_2, \dots, y_n$ боюнча жекече туундуларынын баары бардык аргументтер боюнча үзгүлтүксүз болсун дейли. Бул учурда (6.5.1) системасына 3.1 теоремасын колдонууга болот (3 глава § 3.1 кара). Эгерде $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ точкасы кандайдыр бир $D' \subset D$ областында жатса, анда (6.5.1) системасынын $y_i = y_i^0$ шартын $x = x_0$ болгондо $(i = 1, 2, \dots, n)$ аткарган жалгыз чыгарылышы жашайт.

Ал чыгарылыш төмөнкүдөй болсун дейли:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \phi_1\left(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right), \\ y_2 = \phi_2\left(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right), \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ y_n = \phi_n\left(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right). \end{array}\right\} \qquad (6.5.2)$$

Бул формулада чыгарылыштардын $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ - дон көз карандылыгын көрсөттүк, анткени ал параметр катары ар кандай сандык мааниси кабыл алышы мүмкүн.

$D$ областында $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ баштапкы чекитин жана кандайдыр бир $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ биздин чыгарылышта жаткан чекит карайбыз.

Эгерде $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ чекитин баштапкы чекит катары карасак, анда жашоо жана жалгыздык теоремасы боюнча чыгарылышын $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ чекити аркылуу өтөт, демек төмөнкүдөй формула туура болот:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^0 = \phi_1\left(x_0; x_\eta, y_1, y_2, \dots, y_n\right), \\ y_2^0 = \phi_2\left(x_0; x_\eta, y_1, y_2, \dots, y_n\right), \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ y_n^0 = \phi_n\left(x_0; x_\eta, y_1, y_2, \dots, y_n\right). \end{array}\right\} \qquad (6.5.3)$$

(6.5.3) формуласы (6.5.2) системасын $D$ областында $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ баштапкы шартына карата чыгарууга боло тургандыгын жана оң жагы $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ боюнча үзгүлтүксүз жеке туундуларына ээ болот.

Эгерде $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ баштапкы шартын $c_1, c_2, \ldots, c_n$ турактуу чоңдуктар менен алмаштырсак $x_0$ параметрин сан менен алмаштырсак (6.5.3) формуласынан төмөнкүгө ээ болобуз

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_1, \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_2, \\ ------------- \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_n. \end{array}\right\} \qquad (6.5.4)$$

(6.5.4) формуласынын баардыгы (6.5.1) системасынын жалпы интегралы деп, ал эми ар бир барабардык өз алдынча (6.5.1) системасынын биринчи интегралы деп аталат. Эгерде (6.5.4) формуласынын сол жагындагы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дин ордуна (6.5.1) системасынын чыгарылышын (6.5.2)ни койсок сол жагы кандайдыр бир турактуу чоңдукка барабар болот. Демек биринчи интегралга эки аныктмам берүүгө болот:

1) (6.5.1) системасынын биринчи интегралы деп системанын жалпы чыгарылышындагы теңдемеден эркибизче алынган турактуу чоңдуктарга карата чыгарылган катышты айтабыз.

Бул аныктама (6.5.4) системасынын бардыгына тиешелүү. Ошондуктан ар бир биринчи интегралды мүнөздөй турган аныктама беребиз.

2) Эгерде сол жагы көз каранды эмес чоңдуктан, изделүүчү функциядан көз каранды болгон жана теңдеш турактууга барабар болбогон катыштагы изделүүчү функциялардын ордуна (6.5.1) системасынын кандайдыр бир чыгарылышын койгондо турактуу чоңдукка барабар болсо, анда бул катыш (6.5.1) системасынын биринчи интегралы деп аталат.

Эгерде $\varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \varphi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функциялары (6.5.1) системасынын биринчи интегралдары болушса, анда

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = c \qquad (6.5.5)$$

да (6.5.1) системасынын биринчи интегралы болот, мында $\Phi$ – $n$ аргументтүү үзгүлтүксүз функция.

Экинчи аныктаманын негизинде биринчи интегралга аналитикалык белгисин берүүгө болот.

Эгерде кандайдыр бир

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = c \qquad (6.5.6)$$

биринчи интегралдын сол жагындагы $y_1, y_2, ..., y_n$ аргументтердин ордуна (6.5.1) системасынын каалаган чыгарылышын койсок, анда (6.5.6) сол жагы $x$тен теңдеш турактуу барабар болгон функция болот. Бул туюнтманын эки жагын $x$ аргументи боюнча туундуласак, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0. \qquad (6.5.7)$$

(6.5.7) формуласында $y_1, y_2, ..., y_n$ (6.5.1) системасынын чыгарылышы болгондуктан $\frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{dy_n}{dx}$ туундуларын (6.5.1)дин оң жагы менен алмаштырып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right) = 0. \qquad (6.5.8)$$

Демек (6.5.6) биринчи интегралдын сол жагы (6.5.8) барабардыгын теңдештикке айландырат. Тескерисинче $\varphi\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right)$ функциясы (6.5.8) теңдемесин теңдештикке айландырса, анда ал биринчи интеграл болот.

Демек (6.5.8) барабардыгы $\varphi\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = c$ теңдемеси (6.5.1) системасынын биринчи интегралы болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Мисал. Төмөнкүдөй система карайбыз

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Бул системанын жалпы чыгарылышы

$x = A\cos\left(t + \alpha\right), \quad y = A\sin\left(t + \alpha\right)$, мында $A$ жана $\alpha$ эркибизче алынган турактуу чоңдуктар.

$$x^2 + y^2 = c$$

бул системанын биринчи интегралы. Чындыгында:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy + 2y\left(-x\right) = 0.$$

## VI ГЛАВАГА КАРАТА ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТӨӨ ҮЧҮН МИСАЛДАР

1. Төмөндөгү жөнөкөй түзүлүштөгү матрицалуу дифференциалдык системаларды чыгаргыла:

$$a)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1+2y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=2y_2\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-2y_1-2y_2-y_3\end{cases}\qquad c)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=7y_1-12y_2-2y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=3y_1-4y_2\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-2y_1-2y_3\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=9y_1+22y_2-6y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1-4y_2+y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=8y_1+16y_2-5y_3\end{cases}\qquad d)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=10y_1-3y_2-9y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-18y_1+7y_2+18y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=18y_1-6y_2-17y_3\end{cases}$$

2. Төмөнкү комплекстүү өздүк мааниси бар матрицалуу дифференциалдык системаларды чыгаргыла:

$$a)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=2y_1+y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1+3y_2-y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-y_1+2y_2+y_3\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1-y_2-y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1-y_2\\ \dfrac{dy_3}{dt}=3y_1-y_3\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=3y_1+7y_2-3y_3,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-2y_1-5y_2+2y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-4y_1-10y_2+3y_3\end{cases}\qquad d)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=3y_1-y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=6y_1-3y_2+2y_3\\ \dfrac{dy}{dt}=8y_1-6y_2+5y_3\end{cases}$$

3. Төмөндөгү жордандык нормалдуу түзүлүштөгү матрицалуу дифференциалдык системаларды чыгаргыла:

$$a)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=5y_1-y_2-4y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-12y_1+5y_2+12y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=10y_1-3y_2-9y_3\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1+y_2+y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=3y_1+y_3\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=13y_1+16y_2+16y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-5y_1-7y_2-6y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-6y_1-8y_2-7y_3\end{cases}\qquad d)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=-4y_1+2y_2+10y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-4y_1+3y_2+7y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=-3y_1+y_2+7y_3\end{cases}$$

$$i)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=3y_1+3y_3,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1+8y_2+6y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=3y_1-14y_2-10y_3\end{cases}$$

4. Төмөндөгү бир тексиз теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$a)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=-2y_1+2y_2-e^{2t}\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1+y_2+6e^{2t}\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=3y_1-2y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=2y_1-y_2+15e^{t}\sqrt{t}\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}\dfrac{dy_3}{dt}=-y_1+2y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-3y_1+4y_2+\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}\end{cases}\qquad d)\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=2y_2(t)^{2t}\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-2y_1(t)-3y_2(t)+e^{-t}\end{cases}$$

## VII ГЛАВА

## ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ТУРУМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

### §7.1 Турумдуулук түшүнүгүнө алып келүүчү мисал

Төмөндөгүдөй мисал карайбыз:

$$y'+ay=0 \tag{7.1.1}$$

Ушул теңдемени

$$y(t_0)=y_0 \tag{7.1.2}$$

шартын канааттандырган чыгарылышын табуу керек болсун дейли. (1), (2) маселесинин чыгарылышы төмөнкү түрдө болот:

$$y(t)=y_0e^{-a(t-t_0)}, \infty>t>t_0 \tag{7.1.3}$$

Эгерде баштапкы шарт $y_0$ду кандайдыр бир кичине сандын аймагында өзгөртсөк, ага туура келген чыгарылыш $t$ нын бардык маанисинде (7.1.3) чыгарылышынын аймагында болобу деген суроо коебуз. Ал үчүн

$$y(t_0)=\overline{y}_0 \tag{7.1.4}$$

Бул шартка (7.1.1) теңдемесинин төмөндөгүдөй чыгарылышы туура келет:

$$\overline{y}(t)=\overline{y}_0e^{-a(t-t_0)}, t_0<t<\infty \tag{7.1.5}$$

(7.1.3), (7.1.5) чыгарылышынын жакындыгын карайбыз.

$$\left|\overline{y}(t)-y(t)\right|=\left|(\overline{y}_0-y_0)e^{-a(t-t_0)}\right|=\left|(\overline{y}_0-y_0)\right|e^{-a(t-t_0)} \tag{7.1.6}$$

Берилген баштапкы шарттар төмөнкү шартты канааттандырат дейли:

$$\left|\overline{y}_0-y_0\right|\le\delta \tag{7.1.7}$$

Анда (7.1.6)дан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|\overline{y}(t)-y(t)\right|\le\delta\cdot e^{-\alpha(t-t_0)},t_0\le t<\infty \tag{7.1.8}$$

$\delta$ ны тандап алуу менен (7.1.8) барабарсыздыгынын оң жагын берилген $\varepsilon$ дон кичине болорун көрсөтөлү. Ал $a$ санынын белгисинен көз каранды болот.

*Биринчи учур.* $a=0$ десек, анда (7.1.8) барабарсыздыгынын бардык $t>t_0$ үчүн аткарылат. Учурда $\delta=\varepsilon$ кылып тандап алууга болот.

*Экинчи учур.* $a>0$ болсун дейли. Бул учурда $t_0<t<\infty$ болгондо, $-a(t-t_0)<1$ болот. Демек, (7.1.8) барабарсыздыгы $\delta=\varepsilon$ болгондо аткарылат.

*Үчүнчү учур.* $a<0$ болсун дейли. Анда $e^{-a(t-t_0)}$ функциясы $t>t_0$ болгондо өсүүчү функция болот. Ошондуктан $\delta$ санын канчалык кичине кылып тандап албайлы $t$=$T$ саны табылып $\delta e^{-a(T-t_0)}$ болот. Анткени $-a(T-t)=\ell n\delta$. Андан $T=t_0-\dfrac{1}{a}\ln\delta$. Демек $t$=$T$ болгондо

$$\left|\overline{y}(t)-y(t)\right|=1,t_0<t<\infty$$

## § 7.2 Турумдуулуктун аныктамалары

Бизге төмөнкүдөй теңдемелер системасы берилсин:

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,y_1y_2,...,y_n),i=1,2,...,n \tag{7.2.1}$$

Төмөнкүдөй баштапкы шартты канааттандырсын:

$$y_i(t_0)=y_i^0,\quad i=1,2,...,n \tag{7.2.2}$$

(7.2.1), (7.2.2) маселесинин $t_0<t<\infty$ интервалында аныкталган чыгарылышы жашасын дейли жана ал төмөнкүдөй жазылсын:

$$y_i=\phi_i(t,y_1^0,y_2^0,...,y_n^0),\quad i=1,2,...,n \tag{7.2.3}$$

(7.2.1) дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн төмөндөгүдөй баштапкы шартты карайбыз:

$$y_i(t_0)=\overline{y}_i,\quad i=1,2,...,n \tag{7.2.4}$$

(7.2.1), (7.2.4) маселесинин $t_0<t<\infty$ интервалындагы чыгарылышы:

$$\overline{y}_i=\overline{\phi}_i(t,\overline{y}_1^0,\overline{y}_2^0,...,\overline{y}_n^0),\quad i=1,2,...,n \tag{7.2.3}$$

1-*Аныктама.* Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып,

$$\left| y_i^0 - \overline{y}_i^0 \right| \prec \delta(\varepsilon), \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (7.3.6)$$

барабарсыздыгы аткарылганда

$$\left| \phi_i\left(t, y_1^0, ..., y_n^0\right) - \overline{\phi}_i\left(t, \overline{y}_1^0, ..., \overline{y}_n^0\right) \right| \prec \varepsilon, \ \ i = 1, 2, ..., n \qquad (7.3.7)$$

Барабарсыздыгы каалаган $t \in (t_0, \infty)$ үчүн аткарылса, анда (7.2.1), (7.2.2) маселенин чыгарылышы Ляпунов боюнча турумдуу деп аталат.

2-*Аныктама*. Эгерде (7.2.1), (7.2.2) маселенин чыгарылышы Ляпунов боюнча турумдуу болсо жана

$$\lim_{t \to \infty} \left| \phi_i\left(t, y_1^0, ..., y_n^0\right) - \overline{\phi}_i\left(t, \overline{y}_1^0, ..., \overline{y}_n^0\right) \right| = 0,$$

шарты аткарылса, анда $\phi_i\left(t, y_1^0, ..., y_n^0\right)$ чыгарылышы Ляпунов боюнча асимптотикалык турумдуу деп аталат.

Бул аныктама боюнча (7.1.1), (7.1.2) маселенин чыгарылышы $a > 0$ болгондо турумдуу жана асимптотикалык турумдуу болот, $a = 0$, (7.1.1), (7.1.2) маселенин чыгарылышы турумдуу,бирок асимптотикалык турумдуу болбойт.

3-*Аныктама*. Эгерде каалаган $\delta > 0$ саны үчүн $\varepsilon_1$ саны жана $t = T$ саны табылып.

$$\left| y_i^0 - \overline{y}_i^0 \right| < \delta$$

барабарсыздыгы аткарылганда

$$\left| \phi_i(t, y_1^0, ..., y_n^0) - \overline{\phi}_i(t, \overline{y}_1^0, ..., y_n^0) \right| > \varepsilon_1$$

барабарсыздыгы бардык $t > T$ үчүн аткарылса, анда (7.2.1), (7.2.2) маселенин чыгарылышы турумсуз деп аталат. Бул аныктама боюнча $a > 0$ болгондо (7.1.1), (7.1.2) маселесинин чыгарылышы турумсуз болот.

Демек (7.1.1) (7.1.2) маселесинин чыгарылышынын турумдуулугу, турумсуздугу же асимптотикалык турумдуулугу $a$ саны белгисинен көз каранды болот.

## § 7.3. Турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышынын турумдуулугу

Төмөндөгүдөй сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасын карайбыз:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{7.3.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{7.3.2}$$

Мында

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, ..., \lambda_n$ сандары $A$ матрицасынын өздүк мааниси болсун дейли.

*Теорема: Эгерде $A$ матрицасынын өздүк маанилери төмөндөгүдөй шартты канааттандырса:*

$$\mathrm{Re}\,\ell\lambda_i < -\alpha, \alpha > 0, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

анда (7.3.1), (7.3.2) маселесинин нөлдүк чыгарылышы турумдуу жана асимптотикалык турумдуу болот.

Д а л и л д ө ө. 1-учур $\lambda_1, ..., \lambda_n$ өздүк маанилери жөнөкөй болсун дейли. Бул учурда (7.3.1) системасынын чыгарылышы төмөндөгүдөй болот.

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\overline{\gamma}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\overline{\gamma}_2 + ... + c_n e^{\lambda_n x}\overline{\gamma}_n \tag{7.3.3}$$

Баштапкы шартты колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y_i^{\ 0}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x_1}\gamma_1^{(i)} + c_2 e^{\lambda_1 x_0}\gamma_1^{(i)} + ... + c_n e^{\lambda_n x}\gamma_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{7.3.4}$$

(7.3.4) системасынын аныктагычы төмөнкүдөй болот:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} e^{\lambda_1 x_0} e^{\lambda_1 x_0}\gamma_2^{(1)} ... \gamma_n^{(1)} e^{\lambda_1 x_0} \\ ------------- \\ \gamma_1^{(n)} e^{\lambda_1 x_0} e^{\lambda_1 x_0}\gamma_2^{(n)} ... \gamma_n^{(n)} e^{\lambda_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)x_0} \begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} ... \gamma_n^{(1)} \\ ---- \\ \gamma_1^{(n)} ... \gamma_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$\gamma_1 ... \overline{\gamma}_2, ..., \overline{\gamma}_n$ $A$ матрицасынын өздүк векторлору сызыктуу көз каранды эмес. Ошондуктан,

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} \dots \gamma_n^{(1)} \\ ---- \\ \gamma_1^{(1)} \dots \gamma_n^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Демек (7.3.4) системасы жалгыз чыгарылышка ээ болот.

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{7.3.5}$$

Турактуу чоңдуктун бул маанилерин (7.3.3) формуласына коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y_i(x) = \gamma_1^{(i)} e^{\lambda x} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{1j} y_j^0 + \gamma_2^{(i)} e^{\lambda_2 x} \sum_{j=1}^{n} b_{2j} y_j^0 + \dots + \gamma_n^{(i)} e^{\lambda_n x} \sum_{j=1}^{n} b_{nj} y_j^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{7.3.6}$$

Төмөнкүдөй белгилөө кийребиз:

$$\Gamma = \max_{1 \le i, j \le n} \left| \gamma_i^{(j)} \right|, \; B = \max_{1 \le i, j \le n} \left| b_{ij} \right| \tag{7.3.7}$$

Теореманын шарты боюнча төмөнкүдөй барабарсыздык орун алат:

$$e^{\lambda_1 x} \le e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0 \tag{7.3.8}$$

(7.3.7.), (7.3.8) барабарсыздыктарын, колдонуп, (7.3.6) дан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left| y \;\, (x) \right| \le \Gamma\mathrm{B} \cdot n \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| y_j^0 \right| \tag{7.3.9}$$

Баштапкы шарт төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырсын дейли:

$$\left| y_j^0 \right| \le \delta \tag{7.3.10}$$

Бул барабарсыздыкты колдонуп, (7.3.9) барабарсыздыгынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left| y \;\, (x) \right| \le \Gamma\mathrm{B} \cdot n^2 \cdot e^{-\alpha x} \delta \tag{7.3.11}$$

$$e^{-\alpha x} \le 1, \qquad 0 < x < \infty$$

барабарсыздыгын колдонуп, (7.3.11)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left| y_i(x) \right| \le \Gamma\mathrm{B} \cdot n^2 \cdot \delta$$

Эгерде $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\Gamma\mathrm{B} n^2}$ болсо, анда жогорку барабарсыздыктан

$$\left| y_i(x) \right| \le \varepsilon, \quad 0 < x < \infty \tag{7.3.12}$$

келип чыгат, б.а. (7.3.11) барабарсыздыгынын эки жагынан $x \to \infty$ пределге өтсөк, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to\infty}|y_i(x)| \le \Gamma B n^2 d \cdot \lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$$

Мындан

$$\lim_{x\to\infty}|y_i(x)| = 0 \tag{7.3.13}$$

Демек, (7.3.12), (7.3.13) катыштарынан (7.3.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык турумдуу экендиги келип чыгат. Теорема толук далилденди.

## 7.4. Сызыктуу эмес дифференциалдык системасынын чыгарылышынын турумдуулугу жөнүндө

Бизге төмөнкүдөй дифференциалдык теңдемелер системасы берилсин.

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.1}$$

Төмөнкүдөй баштапкы шарты менен

$$y_i(x_0) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.2}$$

Берилген $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функциялары төмөнкү шартты канааттандырсын:

$$f_i(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Бул учурда $y_1 = 0$ (7.4.1) системасынын чыгарылышы болот. $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ функцияларын $(0, 0, \ldots, 0) \in R$ чекитинде Тейлордун катарына 2-мүчөсүнө чейин ажыратабыз. (7.4.1) системасы төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.3}$$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.4}$$

мында

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, 0, \ldots, 0), \phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = f_i(x, y_2, \ldots, y_n) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

(7.4.4) системасынын нөлдүк чыгарылышы асипмтотикалык турумдуу болсун дейли. Төмөнкүдөй суроо коебуз: ушул касиет (7.4.3.) системасы үчүн $\phi_i(x, y_1, y_2 ..., y_n)$ кандай шартты канааттандырганда сакталат? $\phi_i(x, y_1, y_2 ..., y_n)$ функциялары төмөнкү шартты канааттандырсын дейли.

$$|\phi_i(x, y_1,..., y_n| \le \left|\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_j} y_k y_j\right| \le M \sum_{j,k=1}^{n} |y_k||y_j| \le M \sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{y_k^2 + y_j^2}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{M}{2} n\left(\|y\|^2 + \|y\|^2\right) = Mn\|y\|^2$$

$$M \ge \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_j}\right|; \qquad k, j, i = 1, 2, ..., n \qquad (7.4.6)$$

(7.4.6) барабарсыздыгын алууда биз төмөнкүдөй барабарсыздыктарды колдондук:

$$y_k y_j \le \frac{y_k^2 + y_j^2}{2};$$

$$|y_k| \le \sum_{j=1}^{n} y_k^2; \quad k = 1, 2, ..., n$$

(7.4.3), (7.4.2) Коши маселеси төмөнкүдөй интегралдык теңдемелер системасына тең күчтө болот:

$$\overline{y}(x) = e^{A(x-x_0)}\overline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(t-s)}\phi(s, \overline{y})ds \qquad (7.4.7)$$

$A$ матрицасынын өздүк маанилери үчүн төмөнкүдөй барабарсыздык орун алсын:

$$\operatorname{Re} e\ell\lambda_i < -\alpha < 0, \qquad \alpha > 0$$

Бул учурда (7.3.11) барабарсыздыгын колдонуп, барабарсыздыкка ээ болобуз:

$$\left\|e^{A(x-x_0)}\right\| \le C_1 e^{-\alpha(x-x_0)}$$

(7.4.6) барабарсыздыгын колдонуп, төмөнкү барабарсыздыкка ээ болобуз:

$$\|\overline{y}(x)\| \le C_1\|y_0\| e^{-\alpha(x-x_0)} + C_1\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha(x-s)}\|\overline{y}\|^2 ds, \qquad (7.4.8)$$

Бернуллинин теңдемесин карайбыз:

$$z'(x) = -\alpha z(x) + C_1 z^2,\ z(x_0) = z_0 > C_1 \|y_0\| \tag{7.4.9}$$

Бул Коши маселеси интегралдык теңдемеге тең күчтө

$$z(x) = z_0 e^{-\alpha(x-x_0)} + C_1 \int_0^x e^{-\alpha(x-s)} z^2(s) ds \tag{7.4.10}$$

$$\|\bar{y}(x)\| < z(x) \tag{7.4.11}$$

барабарсыздыгын далилдейбиз. (7.4.9) Бернуллинин теңдемесин төмөнкүдөй чыгарабыз:

$$z^{-1}(x) = y(x) \text{ десек, } y'(x) = -z^{-2} z' \text{ болот.}$$

Демек, (7.4.9)дан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$-y'(x) = -\alpha y(x) + C_1 \text{ же } y'(x) = \alpha y(x) - C_1, \quad y(x_0) = \frac{1}{z_0} = y_0$$

$$y(x) = Ce^{\alpha x} + \frac{C_1}{\alpha}, \quad y(x_0) = y_0 C e^{\alpha x_0} + \frac{C_1}{\alpha}$$

Мындан

$$C = e^{-\alpha x_0}\left(y_0 - \frac{C_1}{\alpha}\right)$$

Демек,

$$y = \left(y_0 - \frac{C_1}{\alpha}\right) e^{\alpha(x-x_0)} + \frac{C_1}{\alpha}$$

Бернуллинин теңдемесинин чыгарылышы төмөнкү түрдө болот:

$$z(x) = \frac{1}{\frac{C_1}{\alpha} + \left(y_0 - \frac{C_1}{\alpha}\right) e^{\alpha(x-x_0)}} = \frac{\alpha z_0}{C_1 z_0 + (\alpha - C_1 z_0) e^{\alpha(x-x_0)}} \tag{7.4.12}$$

Биз баштапкы шарт $z_0$ төмөнкү шартты аткарсын дейли:

$$z_0 < \frac{\alpha}{C_1}$$

Бул учурда (7.4.12)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

1) $z(x) < \dfrac{\alpha z_0}{C_1 z_0 + \alpha - C_1 z_0} = z_0, \quad 0 < x < \beta$

б.а. $z < \varepsilon$ болот, эгерде $z_0 < \varepsilon$ болсо;

2) $z(x) > 0, \qquad 0 < x < \infty$; 3) эгерде $x \to \infty$, анда $z(x) \to 0$

(7.4.11) барабарсыздыгынын тууралыгын далилдейбиз. Эгерде $x = x_0$ десек, анда (7.4.8)ден жана (7.4.9)дан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left\|\overline{y}(x_0)\right\| \le C_1\left\|y_0\right\| < z_0 \tag{7.4.13}$$

$x = x_1$ чекити табылып, бул чекитте $\left\|\overline{y}(x_1)\right\| = z(x_1)$ болот дейли, бирок $\left\|\overline{y}(x_1)\right\| < z(x), x_0 < x < x_1$ болгондо, (7.4.10)дон $x = x_1$ десек, төмөнкүнү алабыз:

$$z\left(x_1\right) = z_0 e^{-\alpha(x_1 - x_0)} + C_1\int_{x_0}^{x_1} e^{-\alpha(x_1 - s)} z(s)ds = \left\|y(x_1)\right\| \le C_1\left\|y_0\right\| e^{-\alpha(x_1 - x_0)} +$$

$$+C_1\int_{x_0}^{x_1} e^{-\alpha(x_1 - s)}\left\|y^2(s)\right\| ds < z_0 e^{-\alpha(x_1 - x_0)} +$$

$$+C_1\int_{x_0}^{x_1} e^{-\alpha(x_1 - s)} z(s)ds = z(x_1)$$

Мындан 1<1 барабарсыздыгын алабыз. Бул карама-каршылык (7.4.11) барабарсыздыгынын тууралыгын далилдейт. (7.4.1) Коши маселесинин нөлдүк чыгарылышынын турумдуу жана асимптотикалык турумдуу экендигин көрсөтөбүз.

Турумдуулуктун аныктамасы боюнча (каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta\left(\varepsilon\right)$ саны табылып $x \in \left(x_0, \infty\right)$ $\left\|y_0\right\| < \delta$ болгондо $\left\|y_0\right\| < \varepsilon$, $\forall x \in \left(x_0, \infty\right)$, $\left\|\overline{y_0}\right\| < \delta$, болсун) жана $\delta$ саны төмөнкү барабарсыздыкты аткарсын дейли.

$$C_1\delta < z_0 < 2C_1\delta \tag{7.4.14}$$

Бул барабарсыздыктан $2C_1\delta = \varepsilon$ болсун десек, (7.4.11) жана $z(x)$ функциясынын 1-касиетин колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left\|\overline{y}(x)\right\| < z(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0, \infty),$$

б.а. (7.4.11) системасынын нөлдүк чыгарылышы турумдуу болот. Эгерде $z(x)$ функциясынын 3-касиетин колдонсок жана (7.4.11) барабарсыздыгын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to\infty}\left\|\overline{y}(x)\right\| \le \lim_{x\to\infty} z(x) = 0$$

б.а.

$$\lim_{x\to\infty}\left\|\overline{y}(x)\right\| = 0$$

Демек (7.4.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык турумдуу болот.

Төмөнкүдөй теорема далилденди.

Теорема: Эгерде

1) $f_i(x,0,0,...,0)=0, \quad i=1,2,...,n$

2) $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial f_j}(x,0,...0)=const$ жана $A=(a_{ij})_{i,j=1}$ матрицасынын өздүк маанилери төмөнкү шартты аткарса:

$$\mathrm{Re}\,e\ell\lambda_i<-\alpha<0;$$

3) $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_j}(x,y,...,y_n)$ –чектелген болсо, анда (7.4.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы турумдуу жана асимптотикалык турумдуу болот.

## § 7.5. Системанын чыгарылышынын турумдуулугун Ляпуновдун функциясы аркылуу изилдөө

Сызыктуу эмес теңдемелер системасын карайбыз.

$$\frac{dy_i}{dx}=f(x,y_1,y_2,...,y_n), \quad i=1,2,...,n \tag{7.5.1}$$

$f(x,y_1,y_2,...,y_n)$ төмөнкү шарттарды канааттандырсын дейли:

1) $x_0<x<\infty, |y_i|<b_i$ болгон областта аныкталып, үзгүлтүксүз болушсун

2) $f_i(x,0,...,0)=0, \quad (i=1,2,...,n)$

$V(y_1,y_2,...,y_n)>0$ функциясы төмөнкүдөй касиетке ээ болсун:

$I)\, V(0,...,0)=0$ болсун;

$II)\, V\left(y_1,...,y\right)>0$ $R^n$ мейкиндигинин бардык чекиттеринде

$III)\, V(y_1,....,y_n)$ үзгүлтүксүз болсун жана үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун.

I-III шарттарын канааттандырган функция Ляпуновдун функциясы деп аталат.

__*1-Лемма*__. Каалаган $\varepsilon_1>0$ саны үчүн $\varepsilon_2>0$ саны жашап, каалаган $\|y\|>\varepsilon_1$ болгондо, $V(y)>\varepsilon_2$ болот.

Д а л и л д ө ө: Каршы ыкма менен далилдейбиз. $\varepsilon_1$ саны үчүн $\forall\varepsilon_2$ үчүн $\exists y_n$ $\varepsilon_{2n}\to 0$, $\|y_n\|>\varepsilon_1$, $V(y_n)<\varepsilon_{2n}, \varepsilon_1<\|y_n\|<K$ барабарсыздыгын канааттандыргандыктан ал компактуу көптүк. Демек $\{y_n\}$ ден жыйналуучу удаалаштык бөлүп алууга болот. $y_{n_k}\to y^*$. Бул удаалаштык үчүн

$$V(y_{n_k})<\varepsilon_{2,n_k} \qquad (7.5.2)$$

орун алат.

(7.5.2) барабарсыздыгынан пределге өтүп жана $V$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$V(y^*)\le 0 \text{ б.а. } V(y^*)=0$$

Бирок $\|y^*\|>\varepsilon_1>0$ $V$ функциясынын касиети боюнча качан гана $V(y^*)=0$, $y^*=0$ болгондо. Бул болсо $\|y^*\|\ge\varepsilon_1>0$ карама-каршы. Лемма далилденди.

*2-Лемма.* Каалаган $\varepsilon_1$ саны үчүн $\varepsilon_2>0$ саны жашап, $V(y)>\varepsilon_1$ болгондо каалаган $y$ үчүн $\|y\|>\varepsilon_2$ болот.

*Далилдөө.* $\varepsilon_2$ жашабасын, анда $\varepsilon_{2,n}\to 0$ үчүн $y_n$ табылып $V(y_n)>\varepsilon_1$ болуп, бирок $\|y_n\|\le\varepsilon_{2,n}$ болсун. $y_n$ чектелген көптүк болгондуктан, ал компактуу көптүк болот, демек $\{y_n\}$ удаалаштыгынан жыйналуучу удаалаштык бөлүп алууга болот. $\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}$ болсун жана $y_{n_k}\to y^*$ жана $\|y_{n_k}\|\le\varepsilon_{2,n_k}$. Акыркы барабарсыздыктан пределге өтүп жана норманын үзгүлтүксүздүгүн колдонуп:

$$\|y^*\|\le 0 \text{ же } y^*=0$$

Бирок $y_{n_k}$ үчүн $V(y_{nk})>\varepsilon_1$ барабарсыздыгы туура болот. Бул барабарсыздыктан пределге өтүп $V$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$V(y^*)=V(0)>\varepsilon_1$$

Бирок $V$ функциясынын аныктамасы боюнча $V(0)=0$. Бул карама-каршылык 2-Лемманын тууралыгын далилдейт.

Ляпуновдун функциясын колдонуп, нөлдүк чыгарылыштын турумдуулугунун шартын далилдейбиз:

*1-теорема. Эгерде*

$$\frac{dV}{dx}\le 0$$

*$\phi_i(x)$ (7.5.1) системасынын $\phi_i(x_0) = y_i^0$ шартын канааттандырган чыгарылышы болсо, анда (7.5.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы турумдуу болот.*

Д а л и л д ө ө. Каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta(\varepsilon)$ саны табылып $\|\overline{y}^0\| < \delta$ болгондо, $\|\overline{y}(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0, \infty)$ боло тургандыгын көрсөтөбүз. Бул шарт аткарылбасын дейли, б.а. каалаган $\delta$ үчүн $\varepsilon_1$ саны табылып $\|\overline{y}^0\| < \delta$ болгондо, $\|y(x)\| < \varepsilon_1, x_1$ жашасын. 1-Лемманын негизинде $\varepsilon_1$ саны табылып, $V(\overline{y}(x_1)) > \varepsilon_2$ болот. $V(\overline{y})$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде $\|\overline{y}^0\| < \delta$ болгондо, $V(\overline{y}(x_0)) < \dfrac{\varepsilon_2}{2}$ болот. Төмөнкүдөй айырма карайбыз:

$$V(\overline{y}(x_1)) - V(\overline{y}(x_0)) > \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} > \frac{\varepsilon_2}{2} > 0 \qquad (7.5.3)$$

Ушул эле айырмага Лагранждын формуласын колдонсок:

$$V(\overline{y}(x_1)) - V(\overline{y}(x_0)) = \frac{dV}{dx}\Big|\cdot(x_1 - x_0)x^* = x_0 + \theta(x_1 - x_0)$$

Мындан $x_1 - x_0 > 0$ жана $\dfrac{dV}{dx} \le 0$ экендигин эске алсак,

$$V(\overline{y}(x_1)) - V(\overline{y}(x_0)) \le 0 \qquad (7.5.4)$$

(7.5.3)кө карама-каршы барабарсыздык алдык. Теорема далилденди.

Асипмтотикалык турумдуулук үчүн төмөнкү теорема орун алат:

*2-Теорема. Эгерде*

$$W(\overline{y}, x) = (gradV, \overline{f}) \le \overline{W}(\overline{y}) \le 0 \qquad (7.5.5)$$

болсо, анда (7.3.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык турумдуу болот.

Д а л и л д ө ө. $\dfrac{dV(\overline{y})}{dx} \le W(\overline{y}(x)) \le 0$ болгондуктан, $V(\overline{y})$ функциясы монотондуу өспөйт. $\lim\limits_{x\to\infty} V(\overline{y}(x)) = 0$ боло тургандыгын көрсөтөбүз.

Бул орун албасын дейли, анда $\lim\limits_{x\to\infty} V(\overline{y}(x)) = \alpha > 0$

$V(\overline{y}(x))$ функциясы өзүнүн пределине жогору жагынан умтулгандыктан, $\alpha = \varepsilon_2$ десек, анда 2-лемманы колдонуп, $\|\overline{y}(x)\| \ge \varepsilon_1$ барабарсыздыгына ээ болобуз. 1-лемманы колдонсок, $\bar{W}\left\|\left(\bar{y}(x)\right)\right\| \geq \beta > 0$ барабарсыздыгына ээ болобуз, б.а. $-\bar{W}\left\|\left(\bar{y}(x)\right)\right\| \leq -\beta > 0$

Төмөнкүдөй айырманы карайбыз:

$$V\left(\bar{y}(x)\right) - V\left(\bar{y}(x_0)\right) = \frac{dV}{dx}\Big|(x - x_0) \leq -W(\bar{y}(x^*))(x - x_0) \leq -\beta(x - x_0)$$

$$x^* = x_0 + \theta(x - x_0)$$

Мындан $x \to \infty$ ке ээ болобуз. $V(\bar{y})$ функциясынын аныктамасы боюнча $V(\bar{y}) \geq 0$. Демек карама-каршылык

$$\lim_{x\to\infty} V\left(\bar{y}(x)\right) = 0 \qquad (7.5.6)$$

экендигин далилдейт.

Бул барабардыктан $\lim\limits_{x\to\infty} V\left\|\left(\bar{y}(x)\right)\right\| = 0$ келип чыга тургандыгын далилдейбиз. Акыркы барабардык орун албасын дейли. Анда $\{x_n\} \to \infty$ удаалаштыгы жана $\varepsilon_1$ саны жашап, $\left\|\bar{y}(x)\right\| \geq \varepsilon_1$ болот.

Мындан 1-лемманы колдонуп, $V(\bar{y}(x)) \geq \varepsilon_2$ ге ээ болобуз. Бул (7.5.6) барабардыгына карама-каршы. Карама-каршылык $\lim\limits_{x\to\infty}\left\|\bar{y}(x)\right\| = 0$ болоорун далилдейт. Теорема толук далилденди.

*Мисал:* $\dfrac{dy}{dx} = 2y_2 - y_1^3 \sin^2 x$, $\dfrac{dy_2}{dx} = -3y_1 - y_2^5$ системасынан нөлдүк чыгарылышынын турумдуулугун изилдегиле.

Бул учурда сызыктуу бөлүгүнүн матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Анын өздүк маанилери:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } \lambda^2 + 6 = 0; \quad \lambda = \pm i\sqrt{6}$$

Демек, 7.4 параграфтагы теорема жооп бере албайт. Төмөнкүдөй функция кийребиз.

$$V(y_1, y_2) = 3y_1^2 + 2y_2^2$$

Мунун берилген системанын жардамы аркасындагы туундусу:

$$\frac{dV}{dx} = 6y_1(2y_2 - y_1^3 \sin^2 x) + 4y_2(-3y_1 - y_2^5) = -6y_1^4 \sin^2 x - 4y_2^6 = W(x,t) \leq 0$$

Демек 1-теореманын негизинде системанын нөлдүк чыгарылышы турумдуу болот.

# VIII ГЛАВА

## ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕ. БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕ

### §8.1 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы жөнүндөгү маселе

Изделүүчү функция $z$ бир нече өзгөрүлмө чоңдуктан көз каранды болсун: $x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (n \geq 2)$.

Эгерде теңдемеде изделүүчү функция, анын жекече туундулары жана көз каранды эмес чоңдуктар катышса, анда мындай теңдеме жекче туундулуу дифференциалдык теңдеме деп аталат. Ал төмөнкү түрдө жазылат:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1{}^k}, \ldots\right) = 0.$$

Мында $F$ аргументтери боюнча белгилүү функция.

Теңдеме кирген жекече туундунун эң чоң тартиби жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин тартиби деп аталат.

$n$- өзгөрүлмө чоңдуктан көз каранды болгон биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүдөй жазылат:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (8.1.1)$$

Көп учурда жекече туундунун жөнөкөй түрү колдонулат

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n;$$

бул белгилөө менен (8.1.1) теңдемеси төмөнкү түрдө жазылат:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = 0. \qquad (8.1.1')$$

Белгисиз функция эки өзгөрмө чоңдуктан көз каранды болгондо көп учурда төмөнкү белгилөөнү колдонот: $z$ изделүүчү функция, $x$, $y$ көз каранды эмес чоңдук, $p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$ жекече туундулары. Бул учурда теңдеме төмөнкү түрдө жазылат:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \qquad (8.1.2)$$

же

$$F\left(x, y, z, p, q\right) = 0. \qquad (8.1.2')$$

(8.1.1), (8.1.2) теңдемеси $x$, $y$, $z$, -ден көз каранды болбошу мүмкүн, бирок жок дегенде $z$-тин бир жекече туундусу кирет.

Экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^{\ 2}}, \ldots\right) = 0. \quad (8.1.3)$$

Экинчи туундулар үчүн төмөнкү белгилөө кийрисек:

$$p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Анда (8.1.1) теңдемеси төмөнкү түрдө жазылат

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}\right) = 0. \qquad (8.1.3')$$

Эки өзгөрмөлүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Монжанын белгилөөсүн кийребиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv t.$$

Бул белгилөө аркылуу экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүдөй жазылат:

$$F\left(x, y, p, q, r, s, t\right) = 0. \qquad (8.1.4)$$

Берилген теңдеменин бардык чыгарылышын тапкыла деген маселе коебуз. Кадимки дифференциалдык теңдемени жекече туундулуу теңдеменин жекече учуру $n=1$ болгондо алынат, анын чыгарылышы чексиз көп. Демек, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы да чексиз көп экендиги келип чыгат.

Төмөнкүдөй биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме карайбыз:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)=0. \qquad (8.1.5)$$

Эгерде бул теңдемеде $y$ти параметр катары карасак, анда (8.1.5) $z$ке карата кадимки дифференциалдык теңдеме.

(8.1.5)тин жалпы чыгарылышы

$$z=\phi(x, y, c). \qquad (8.1.6)$$

Демек чыгарылыш $y$-параметринен көз каранды. (8.1.6), (8.1.5) теңдемесинин чыгарылышы болушу үчүн $c$ –турактуусу $y$тен функция болушу зарыл жана жетиштүү болот. Ошондуктан (8.1.5) жалпы чыгарылышы эркибизче алынган бир функциядан көз каранды, б.а.

$$z=\phi(x, y, c(y)). \qquad (8.1.6')$$

## § 8.2 Биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме

Төмөнкүдөй теңдеме карайбыз

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \qquad (8.2.1)$$

мында $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ден көз каранды болгон белгилүү функциялар (бул функциялар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтери боюнча берилген областта үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз туундуларга ээ болот), $f$ –изделүүчү функция.

Бул теңдемени бир тектүү сызыктуу жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме деп атайбыз.

Эгерде (8.2.1) теңдемесинде $f$ функциясынын ордуна белгилүү туундуга ээ болгон функцияны койгондо (8.2.1) теңдештикке айланса, анда ал функция (8.2.1)дин чыгарылышы деп аталат.

(8.2.1) теңдемесин 6чы главада дифференциалдык теңдеменин биринчи интегралын караганда кездештиргенбиз. (8.2.1) жеке туундулуу теңдеме менен катар төмөнкүдөй кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасын карайбыз

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \qquad (8.2.2)$$

(8.2.1) жана (8.2.2) теңдемелери тыгыз байланышта, б.а. (8.2.2) системасынын каалаган биринчи интегралынын сол жагы (8.2.1) теңдемесинин чыгарылышы болот; тескерисинче, (8.2.1) теңдемесинин каалаган чыгарылышын турактуу чоңдукка барабарласак ал (8.2.2) системасынын биринчи интегралы болот. (8.2.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышын табуу аракетин кылабыз.

$X[f]$ оператору төмөнкү касиетке ээ. Эгерде $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ функциясы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ боюнча жеке туундуларга ээ болсо, ал эми $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтери боюнча жеке туундуларга ээ болсо, анда

$$X\left[\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)\right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2} X[\psi_2] + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} X[\psi_k]. \qquad (8.2.3)$$

Далилдөө.

$$X[\Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} X_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} X_1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} X_2 +$$

$$+ \ldots + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} X_n = = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} X_n \right) +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} X_n \right) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2} X[\psi_2] + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} X[\psi_k],$$

б.а. (8.2.3) далилденди.

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \qquad (8.2.4)$$

(8.2.2) системасынын интегралы болсун.

Алтынчы главада биз далилдеген боюнча $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ (8.2.1) теңдемесинин жеке чыгарылышы болот, б.а.

$$X[\psi_1]\equiv 0, X[\psi_2]\equiv 0,\dots, X\left[\psi_{n-1}\right]\equiv 0, \tag{8.2.5}$$

теңдештиктери орун алат.

Каалагандай эркибизче $n$-1 аргументтүү Ф функциясын алабыз, аргументтери $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}$ болсун:

$$\Phi\left(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\right) \tag{8.2.6}$$

(8.2.3) касиети боюнча

$$X[\Phi]=0,$$

б.а. (8.2.6) туюнтмасы (8.2.1)дин чыгарылышы болот. Демек

$$f=\Phi\left(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\right)$$

(8.2.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы болот.

(8.2.1) теңдемеси үчүн Коши маселеси төмөнкүдөй коюлат:

$$f\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n^0\right)=\phi\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\right) \tag{8.2.7}$$

шартын канааттандырган (8.2.1)дин $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ чыгарылышын тапкыла.

Мында $x_n^0$ – берилген сан, $\phi\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\right)$ – берилген функция.

Бул учурда

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n^0\right)=\overline{\psi}_1,\\
&\psi_2\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n^0\right)=\overline{\psi}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_{n-1}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n^0\right)=\overline{\psi}_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.8}$$

теңдемелердин системасы $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$ ге карата чыгарылышка ээ болот, мында $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}$ (8.2.3)түн биринчи интегралдары.

Демек

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=w_1\left(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\dots,\overline{\psi}_{n-1}\right),\\
&x_2=w_2\left(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\dots,\overline{\psi}_{n-1}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n-1}=w_{n-1}\left(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\dots,\overline{\psi}_{n-1}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.9}$$

(8.2.1), (8.2.7) Коши маселесинин чыгарылышы төмөнкүдөй болот

$$f=\phi\left(w_1\left(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\right),w_2\left(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\right),\dots,w_{n-1}\left(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\right)\right) \tag{8.2.10}$$

**1-Мисал.**

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Буга туура келген системаны жазабыз

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\dots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

Системанын *n-1* биринчи интегралы төмөнкүдөй жазылат

$$\frac{x_1}{x_n}=C_1,\frac{x_2}{x_n}=C_2,\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=C_{n-1}.\quad\left(x_n\neq 0\right).$$

Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй жазылат

$$f=\psi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

**2-Мисал.**

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

теңдемеси үчүн

$$z(x,0)=f(x)$$

Коши маселесинин чыгарылышын тапкыла.

Жогорку теңдемеге туура келген кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы төмөнкү түрдө болот

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}.$$

Бул теңдеменин чыгарылышы

$$x^2+y^2=C.$$

Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй болот:

$$z=\phi\left(x^2+y^2\right).$$

Мында $\varphi$ эркибизче алынган функция.

Функция $\psi = x^2 + y^2$, ал эми $\overline{\psi} = x^2$, мындан $x = \sqrt{\overline{\psi}}$. Демек Коши маселесинин чыгарылышы $z = f\left(\sqrt{\overline{\psi}}\right) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Төмөнкү мисалдарды чыгаргыла.

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

теңдемесинин $z(x, y)\big|_{y=1} = x$ шартын канааттандырган чыгарылышын тапкыла.

2. $\sqrt{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \sqrt{z}\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$

теңдемесинин $f(x, y, z)\big|_{x=1} = y - z$ шартын канааттандырган чыгарылышын тапкыла.

## § 8.3 Бир тектүү эмес биринчи тартиптеги жекече туундулуу сызыктуу дифференциалдык теңдеме

$z$-аркылуу изделүүчү функцияны, $x_1, x_2, \dots, x_n$ көз каранды эмес чоңдукту белгилесек, аталган теңдеме төмөнкү түрдө жазылат:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \tag{8.3.1}$$

мында $P_1, P_2, \dots, P_n, R$ – $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ ден көз каранды болгон үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз туундуларга ээ болгон белгилүү функциялар.

(8.3.1) теңдемесинин чыгарылышын айкын эмес функция түрүндө издейбиз:

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \tag{8.3.2}$$

Демек изделүүчү функция $V$ болот.

(8.3.2)ден $x_i$ – боюнча туунду тапсак:

$$\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Мындан

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial V/\partial x_i}{\partial V/\partial z} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Бул маанилерди (8.3.1) теңдемесине коюп, эки жагын $\partial V / \partial z$ ке көбөйтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \qquad (8.3.3)$$

(8.3.3) $V$ функциясына карата $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтери боюнча жекече туундулуу сызыктуу бир тектүү биринчи тартиптеги теңдеме.

Демек §8.2 боюнча (8.3.3) туура келген система төмөнкү түрдө жазылат.

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}. \qquad (8.3.4)$$

Бул $n$ – теңдемелер системасы $n$ сызыктуу көз каранды эмес биринчи интегралга ээ болот:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_0(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_0, \\ \psi_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (8.3.5)$$

(8.3.3) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй болот

$$V = \Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

мында $\Phi$ – эркибизче алынган дифференцирленүүчү функция.

Жогорку барабардыктан

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \qquad (8.3.6)$$

Эгерде (8.3.6)нын оң жагы $z$ боюнча айкын эмес функциянын шартын аткарса, (8.3.1) теңдемесинин $z$ боюнча чыгарылышы болот.

Мисал.

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла, мында $m$ -турактуу сан.

Жогорку жекече туундулуу теңдемеге туура келген кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы төмөнкүдөй болот:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{mf};$$

булардын биринчи интегралы төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \frac{x_2}{x_1} = C_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \frac{f}{x_n^m} = C_n.$$

Эркин функцияны кармаган жалпы чыгарылыш төмөнкүдөй жазылат:

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{f}{x_n^m}\right) = 0.$$

Бул теңдемени акыркы аргументке карата чыгарып төмөнкүгө ээ болобуз

$$f = x_n^m \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

мында $\psi$ – эркибизче алынган функция.

## Адабияттар


1. Степанов В.В. Курс дифференциалъных уравнений. – М.: - Н., 1969.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: - Н., 1978.
3. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: - Н., 1984.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: - Н., 1985.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г, Линейная алгебра. –М.: - Н., 1978.
6. Саадабаев А.С., Сулайманов К. Дифференциалдык теңдемелердин кыскача курсу боюнча методикалык колдонмо. – КГУ. – Фрунзе, 1989.
7. Саадабаев А., Салейдинов К.И. Дифференциалдык теңдемелер. – КГНУ: - Бишкек, 1994.
8. Тихонов А.Н., Василнева, Свештников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: - Н., 1985.

## Мазмуну

$$\overset{*}{y}_{p+1} = \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72}(191f(x_p, y_p) -$$

$$-107f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 109f(x_{p-2}, y_{p-2}) - 25f(x_{p-3}, y_{p-3}));$$

$$\tilde{y}_{p+1} = \overset{*}{y}_{p+1} - \frac{707}{750}(\overset{*}{y}_p - \overset{**}{y}_p),$$

$$\overset{**}{y}_{p+1} \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72}(25f(x_{p+1}, \tilde{y}_{p+1}) +$$

$$+91f(x_p, y_p) + 43f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 9f(x_{p-2}, y_{p-2})).$$

$$y_{p+1} = \overset{**}{y}_{p+1} + \frac{43}{750}(\overset{*}{y}_{p+1} - \overset{**}{y}_{p+1}),$$